

---

# **Masterarbeit**

---

Herr  
**Markus Olbrich, B.Sc.**

**Theoretische und experimentelle  
Untersuchungen zu DOE-Strukturen**

Mittweida, 2012



# MASTERARBEIT

---

## **Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu DOE- Strukturen**

Autor:

**Herr**

**Markus Olbrich, B.Sc.**

Studiengang:

**Physikalische Technik**

Seminargruppe:

**PT10w1-M**

Erstprüfer:

**Prof. Dr. rer. nat. Andreas Fischer**

Zweitprüfer:

**Prof. Dr. rer. nat. Bernhard Steiger**

Einreichung:

**Mittweida, 10.07.2012**

Verteidigung/Bewertung:

**Mittweida, 13.07.2012**

# MASTER THESIS

---

## **Theoretical and experimental studies of DOE-structures**

author:

**Mr.**

**Markus Olbrich, B.Sc.**

course of studies:

**Physical Engineering**

seminar group:

**PT10w1-M**

first examiner:

**Prof. Dr. rer. nat. Andreas Fischer**

second examiner:

**Prof. Dr. rer. nat. Bernhard Steiger**

submission:

**Mittweida. 10.07.2012**

defence/evaluation:

**Mittweida, 13.07.2012**



## **Bibliografische Angaben:**

Olbrich, Markus:

Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu DOE-Strukturen – 2012 – xvii, 124, 3 S.

Mittweida, Hochschule Mittweida (FH), University of Applied Sciences,

Fakultät Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik, Masterarbeit, 2012

## **Referat:**

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf das von diffraktiven optischen Elemente (DOE) erzeugte Beugungsbild. Die Berechnung der Ausbreitung des Beugungsbildes durch reale Linsen wird durchgeführt und verschiedene Methoden zur Abschätzung der Größe entwickelt. Die Verifizierung der Simulationsergebnisse erfolgt durch Übertragung der durch Quarzglasstrukturierung erzeugten Höhenunterschiede in die Simulation. Die simulierten Bilder werden den realen mittels Kamera aufgenommenen Bildern gegenüber gestellt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis.....</b>	<b>ix</b>
<b>Formelverzeichnis .....</b>	<b>xi</b>
<b>0 Einleitung.....</b>	<b>1</b>
0.1 Motivation.....	1
0.2 Aufgabenstellung .....	2
<b>1 Stand der Technik.....</b>	<b>3</b>
1.1 Diffraktive optische Elemente.....	3
1.2 Anwendungen von diffraktiven optischen Elementen .....	4
1.3 Herstellungsverfahren von diffraktiven optischen Elementen .....	5
<b>2 Theoretische Betrachtungen .....</b>	<b>7</b>
2.1 Propagationsoperatoren.....	7
2.2 Berechnung diffraktiver optischer Elemente.....	10
<b>3 Abhängigkeit der Beugungsbilder von verschiedenen Parametern .....</b>	<b>13</b>
3.1 Anzahl der Iterationsschritte .....	14
3.2 Propagationsoperator.....	17
3.3 Diskretisierungsstufen.....	21
3.4 Unterordnungen und höhere Ordnungen.....	24
3.4.1 Analytische Beschreibung und Nomenklatur.....	24
3.4.2 Einfachabtastung .....	27
3.4.3 Überabtastung .....	39
3.5 Variation der Strahlquelle .....	49
3.5.1 Variation des Strahlradius .....	49
3.5.2 Abweichung des Strahlradius.....	52
3.5.3 Laterale Verschiebung der Strahlquelle .....	56
3.5.4 Variation der Wellenlänge .....	58
3.5.5 Divergente und konvergente Wellenfronten .....	60
3.5.6 Variation des Strahlprofils .....	63
3.6 Nah- und Fernfeld .....	66

3.7	Wiederholung der DOE-Strukturen.....	68
<b>4</b>	<b>Simulation der Ausbreitung der Beugungsbilder.....</b>	<b>75</b>
4.1	Simulation mit Hilfe von Grafikprozessoren.....	75
4.2	Abbildung mit einer Linse.....	76
4.3	Abbildung des Beugungsbildes aus der Brennebene.....	87
<b>5</b>	<b>Erzeugung von DOE mittels Strukturierung in Quarzglas .....</b>	<b>91</b>
5.1	Ausmessung der erzeugten Strukturen und Übertragung in die Simulation.....	91
5.2	Vergleich realer und simulierter Beugungsbilder.....	97
5.3	Probleme bei der Herstellung von DOE-Strukturen.....	105
5.3.1	Leistungsschwankungen.....	105
5.3.2	Ablagerungen .....	109
5.3.3	Stege .....	112
5.3.4	Glättung .....	116
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>121</b>
<b>I</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>I</b>
<b>II</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>III</b>
	Herleitung der Veränderung der Diskretisierungsstufen für $\lambda_{Abb}$ .....	III
	<b>Danksagung.....</b>	<b>III</b>
	<b>Eidesstattliche Erklärung .....</b>	<b>III</b>

## Abbildungsverzeichnis

<b>Abb. 1-1</b>	Darstellung möglicher Varianten eines DOEs, links: Transmissions-Amplituden-DOE, Mitte: Transmissions-Phasen-DOE, rechts: Reflexions-Phasen-DOE, aus [Jahn2012]3	
<b>Abb. 1-2</b>	Darstellung einiger Beispiele für berechnete (links und Mitte) und real erzeugte (rechts) Beugungsstrukturen, links und Mitte aus [Gues2005], rechts aus [Stan2002]3	
<b>Abb. 1-3</b>	Schematischer Überblick ausgewählter Anwendungsgebiete von diffraktiven optischen Elementen aus [Petz2009] .....	4
<b>Abb. 1-4</b>	Beispiele für Strahlformung mit Hilfe von DOE.....	5
<b>Abb. 2-1</b>	Schematische Darstellung der Abstrahl- und Abbildungsfläche sowie der verwendeten Variablen.....	7
<b>Abb. 2-2</b>	Veranschaulichung des iterativen Fourier-Transformations-Algorithmus (IFTA) nach Gerchberg und Saxton .....	12
<b>Abb. 2-3</b>	Schematische Darstellung der Unterschiede zweier Algorithmen (links: ein iteratives Verfahren, z. B. IFTA; rechts: ein stochastisches Verfahren, z. B. Simulated Annealing) bezüglich Konvergenz; aus [Kres2009].....	12
<b>Abb. 3-1</b>	Darstellung der verwendeten Teststrukturen .....	13
<b>Abb. 3-2</b>	Verwendete Colormap in den nachfolgenden Abbildungen.....	13
<b>Abb. 3-3</b>	links: Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder $ E_B^* $ nach 100 Iterationsschritten; rechts: Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten für jeweils drei verschiedene Anfangsphasenlagen .....	15
<b>Abb. 3-4</b>	links: berechnetes Beugungsbild mit Kennzeichnung der Schnittlinie, rechts: relativer Feldstärkeverlauf entlang der Schnittlinie .....	16
<b>Abb. 3-5</b>	Schematische Darstellung der Wirkungsweise von Fourier- und Fresnel-Elementen in Anlehnung an die Darstellungen von Kress [Kres2009] .....	18
<b>Abb. 3-6</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für Teststruktur 3 für drei verschiedene Entfernungen.....	19
<b>Abb. 3-7</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für Teststruktur 3 für drei verschiedene Entfernungen mit Linsenterm $f' = 24$ mm; $N_x = 2^{10}$ ; restliche Parameter aus <b>Tab. 3-2</b> .....	20
<b>Abb. 3-8</b>	Darstellung der Abhängigkeit der quadratischen Abweichungen von der Anzahl an Diskretisierungsstufen $p$ , durchgezogene Linien: Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt, gestrichelte Linien: Diskretisierung nach jedem Iterationsschritt..	22
<b>Abb. 3-9</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder von Teststruktur 1 für verschiedene Diskretisierungsstufen und Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt .....	23

<b>Abb. 3-10</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder von Teststruktur 1 und 3 für eine binäre Diskretisierung; im Nahfeld mit kontinuierlichem Linsenterm ( $N_x = 2^8$ ) und im Fernfeld ohne Linsenterm ( $N_x = 2^{14}$ ) .....	24
<b>Abb. 3-11</b>	Schematische Darstellung der auftretenden Winkel der Maxima .....	25
<b>Abb. 3-12</b>	Schematische Darstellung der möglichen Ordnungen und ihrer Indizes bei binärer Diskretisierung, in Anlehnung an die Darstellungen von [Kres2009].....	26
<b>Abb. 3-13</b>	Skizze zur Verdeutlichung der Unterschiede von Einfachabtastung (links) und Überabtastung (rechts); aus [Kres2009] .....	28
<b>Abb. 3-14</b>	Darstellung der verwendeten Variablen und Größen, sowie der Teststruktur zur numerischen Bestimmung der Beugungseffizienz; $p = 2$ .....	29
<b>Abb. 3-15</b>	Gegenüberstellung der numerisch bestimmten und analytisch berechneten Beugungseffizienz .....	30
<b>Abb. 3-16</b>	Darstellung der berechneten Beugungseffizienzen der einzelnen Ordnungen für verschiedene Diskretisierungsstufen nach (3-16) und (3-18) .....	31
<b>Abb. 3-17</b>	Gegenüberstellung der berechneten Beugungsbilder der verwendeten Teststruktur aus Abb. 3-14, simuliert mit dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral und der Fresnel-Näherung im Spektralraum für verschiedene Diskretisierungsstufen .....	32
<b>Abb. 3-18</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Querschnitt (entlang der $x$ -Achse) für verschiedene Entfernungen, links: $N_x = 2^8$ , rechts und Mitte: $N_x = 2^9$ ; $N_{x,DOE} = 2^8$ ....	34
<b>Abb. 3-19</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder in verschiedenen Entfernungen; $N_x = 2^{10}$ .....	35
<b>Abb. 3-20</b>	Darstellung der ermittelten halben Ausdehnungen $D_{x,Bild} / 2$ für verschiedene Strahlradian (durchgezogene Linien) und als Vergleich die halbe Ausdehnung des gesamten Beugungsbildes nach (3-23) (gestrichelt); $N_x = 2^{11}$ .....	36
<b>Abb. 3-21</b>	Darstellung der analytisch berechneten Position der Minima des Beispiels aus Abb. 3-19 in Abhängigkeit von der Entfernung $\Delta z$ .....	37
<b>Abb. 3-22</b>	Modifizierte Teststruktur mit erweitertem Rand .....	38
<b>Abb. 3-23</b>	Gegenüberstellung der berechneten Beugungsbilder von Teststruktur 1 und ihrer Modifikation; links: $N_x = 2^{10}$ ; Mitte und rechts: $N_x = 2^{11}$ ; $w_{0,\sigma} = 2$ mm; $\Delta x_{DOE} = 15$ $\mu$ m.....	38
<b>Abb. 3-24</b>	Schematische Darstellung der verwendeten Größen zu Bestimmung der Bedingung ob die Struktur einer höheren Ordnung im Beugungsbild bei einfacher Abtastung und Verwendung eines Operators auf Basis der FFT sichtbar ist.....	39
<b>Abb. 3-25</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Überabtastungen $N_{\tilde{U}_A}$ ; links: $N_x = 2^{12}$ ; Mitte: $N_x = 2^{13}$ ; rechts: $N_x = 2^{14}$ .....	40
<b>Abb. 3-26</b>	Darstellung der Multiplikation einer beliebigen Funktion $f$ mit einer Reihe von Delta-Distributionen $g$ sowie der Faltung der Fourier-Transformierten $F$ und $G$ .....	42

<b>Abb. 3-27</b>	Darstellung der prinzipiellen Pixelgrößen und Lage der Pixel für verschiedene Überabtastungen .....	43
<b>Abb. 3-28</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für eine ungerade Anzahl an Überabtastung; $N_x = 2^{14}$ .....	44
<b>Abb. 3-29</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nahfeld für drei verschiedene Entfernungen; $w_{0,\sigma} = 2$ mm; links und Mitte: $N_x = 2^{13}$ ; rechts: $N_x = 2^{14}$ ; $N_{x,DOE} = 2^{10}$ restliche Parameter aus <b>Tab. 3-7</b> .....	45
<b>Abb. 3-30</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Teststrukturen; $\Delta z = 50$ mm; $w_{0,\sigma} = 300$ $\mu$ m; $N_x = 2^{14}$ restliche Parameter aus <b>Tab. 3-7</b> .....	45
<b>Abb. 3-31</b>	Darstellung der berechneten Beugungsbilder für verschiedene Überabtastungen $N_{\tilde{U}A}$ mit Hilfe des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral; $P_0 = 93,75$ W .....	46
<b>Abb. 3-32</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Pixelgrößen als Vielfaches der Mindestpixelgröße; links: $\lambda_0 = 9$ $\mu$ m; Mitte: $\lambda_0 = 10$ $\mu$ m; rechts: $\lambda_0 = 12$ $\mu$ m .....	48
<b>Abb. 3-33</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Strahlradien und Entfernungen, oben: $N_x = 2^8$ , unten: $N_x = 2^9$ .....	50
<b>Abb. 3-34</b>	Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit des Verhältnisses von Strahlradius in der DOE-Ebene zu Pixelgröße für Teststruktur 1 .....	51
<b>Abb. 3-35</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Strahlradien; Phasenverteilung berechnet für: $w_{0,\sigma,IFTA} = 200$ $\mu$ m; restliche Parameter aus <b>Tab. 3-10</b> .....	52
<b>Abb. 3-36</b>	Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit der relativen Abweichung zwischen $w_{0,\sigma,Abb}$ und $w_{0,\sigma,IFTA}$ mit Spline-Interpolation zwischen den Messwerten zur Verbesserung der Übersichtlichkeit ...	53
<b>Abb. 3-37</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Teststrukturen; Phasenverteilung berechnet für: $w_{0,\sigma,IFTA} = 200$ $\mu$ m; Abbildung berechnet mit $w_{0,\sigma,Abb} = 475$ $\mu$ m; ohne Linsenterm; oben: $N_x = 2^{12}$ ; unten: $N_x = 2^{13}$ ; restliche Parameter aus <b>Tab. 3-10</b> .....	55
<b>Abb. 3-38</b>	vergrößerte Darstellung der Mittenbereiche für Teststruktur 3 für verschiedene Entfernungen und verwendete Strahlradien $w_{0,\sigma,Abb}$ ; links: $N_x = 2^{12}$ ; Mitte und rechts: $N_x = 2^{13}$ ; Falschfarbendarstellung zur besseren Sichtbarkeit .....	55
<b>Abb. 3-39</b>	Darstellung der berechneten Beugungsbilder; links: ohne Umklappprozess, $N_x = 2^{10}$ ; rechts: mit Umklappprozess aufgrund der Begrenzung der Abbildungsfläche, $N_x = 2^9$ ; für beide Darstellungen: $x_M = y_M = w_{0,\sigma} = 300$ $\mu$ m .....	56

<b>Abb. 3-40</b>	Darstellung der erhaltenen Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit der Position der zur Abbildung verwendeten Strahlquelle bezogen auf den verwendeten Strahlradius $w_{0,\sigma}$ in % .....	57
<b>Abb. 3-41</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nah- (oben: $N_x = 2^{10}$ ) und Fernfeld (unten: $N_x = 2^{13}$ ) für verschiedene Wellenlängen $\lambda_{Abb}$ ; $\lambda_{IFTA} = 1 \mu\text{m}$ .....	59
<b>Abb. 3-42</b>	Darstellung der Ergebnisse der Diskretisierung mit $p = 5$ und die sich ergebende Phasenlage für $\lambda_{Abb} = \lambda_{IFTA}$ , $\lambda_{Abb} = 2 \cdot \lambda_{IFTA}$ und $\lambda_{Abb} = 0,5 \cdot \lambda_{IFTA}$ nach Reduzierung ...	60
<b>Abb. 3-43</b>	Darstellung der sich ergebenden Beugungsbilder für konvergente Wellenfronten in der DOE-Ebene für verschiedene Anwendungsfälle .....	61
<b>Abb. 3-44</b>	Darstellung der verwendeten Strahlverteilungen sowie das sich damit ergebende Beugungsbild in der Abbildungsebene.....	65
<b>Abb. 3-45</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Elementgrößen und Entfernungen, $w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$ , Elementanzahlen nach (2-8) und (3-10), so dass keine Beschneidung der Strukturen entsteht .....	67
<b>Abb. 3-46</b>	Darstellung der zur Approximation verwendeten Stützstellen, der exakten quadratischen Approximation und der quadratischen Approximation mit gerundeten Koeffizienten .....	68
<b>Abb. 3-47</b>	Darstellung möglicher Anordnung der gleichen DOE-Strukturen .....	69
<b>Abb. 3-48</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Methoden in den vier Tests	70
<b>Abb. 3-49</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nahfeld für Methode 2 und 3 .....	71
<b>Abb. 3-50</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für sechsfache Wiederholung und verschiedene Strahlradien im Übergangsbereich; $w_{0,\sigma,IFTA} = w_{0,\sigma,Abb} = w_{0,\sigma}$ ; $N_{x,IFTA} = 2^7$ ; $N_{x,Abb} = 2^{11}$ ; $\Delta z = 25 \text{ mm}$ ; $\Delta x_{DOE} = 4 \mu\text{m}$ ; restliche Parameter aus <b>Tab. 3-15</b> .....	72
<b>Abb. 3-51</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für zehnfache Wiederholung und verschiedene Entfernungen; $w_{0,\sigma,IFTA} = w_{0,\sigma,Abb} = 1 \text{ mm}$ ; $N_{x,IFTA} = 2^7$ ; von links: $N_{x,Abb} = 2^{13}$ , $2^{14}$ , $2^{15}$ , $2^{15}$ ; $\Delta x_{DOE} = 4 \mu\text{m}$ ; ohne Linsenterm; restliche Parameter aus <b>Tab. 3-15</b> .....	73
<b>Abb. 4-1</b>	Darstellung der erhaltenen Ergebnisse der Berechnung mittels Grafikprozessor; oben: die Berechnungsdauer in Abhängigkeit der Größe der Matrizen der Abstrahlfläche mit linearer Regression; unten: die Beschleunigung der beiden Möglichkeiten zur GPU-Berechnung gegenüber dem Server.....	76
<b>Abb. 4-2</b>	Visualisierung der Parameter in den Gleichungen (4-1) bis (4-3) sowie (4-12) und (4-13) .....	77
<b>Abb. 4-3</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder auf den verschiedenen Grenzflächen .....	79
<b>Abb. 4-4</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in der Brennebene der Linse bei einer Verschiebung der Linse um $\Delta z_L$ ; simuliert mit Fresnel-Kirchhoffschen	



Beugungsintegral; Parameter aus <b>Tab. 4-2</b> , 1. Grenzfläche bis Abbildungsfläche um $\Delta z_L$ verschoben.....	81
<b>Abb. 4-5</b> oben: Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in verschiedenen Ebenen vor und nach der bildseitigen Brennebene simuliert mit Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral; Parameter aus <b>Tab. 4-2</b> , unten: Beugungsbilder in der zugeordneten Entfernung $\Delta z_{Abb}$ simuliert mit der Fresnel-Näherung im Spektralraum.....	81
<b>Abb. 4-6</b> Darstellung der Abhängigkeit der Abbildungsentfernung $\Delta z_{Abb}$ von $a'$ für zwei verschiedene Entfernungen $\Delta z_I$ des DOEs von der gegenstandsseitigen Hauptebene der Linse und normiert auf die bildseitige Brennweite.....	83
<b>Abb. 4-7</b> oben: Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in verschiedenen Ebenen nach der gegenstandsseitigen Brennebene für: $f' = 50$ mm; $\Delta z_I = 80$ mm; $z_0 = 0$ mm; $\Delta x_{DOE} = 5$ $\mu$ m; $N_x = 2^{12}$ ; für $\Delta z_{Abb} = 800$ mm $N_x = 2^{14}$ ; restliche Parameter aus <b>Tab. 4-2</b> ; simuliert mit der Fresnel-Näherung im Spektralraum .....	83
<b>Abb. 4-8</b> Darstellung der strahlenoptisch berechneten Bildpunkte mit Variation von $y_0$ und $\sigma$ im Vergleich zur wellenoptisch berechneten Größe des Beugungsbildes .....	85
<b>Abb. 4-9</b> Darstellung verschiedener Verfahren zur Abschätzung der Bildgröße: rot: aus den Beugungsbildern ermittelte Größe; blau: strahlenoptische Berechnung für verschiedene Gegenstandsgrößen mit dem maximalen Winkel $\sigma$ und Bestimmung des Maximums aus den resultierenden Bildgrößen; gelb: Berechnung nach Formel (4-18); grün: Transformation des Gaußstrahles durch die Linse .....	86
<b>Abb. 4-10</b> Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder auf der Abbildungsfläche für zwei verschiedene Abbildungsmaßstäbe.....	89
<b>Abb. 5-1</b> Darstellung der einzelnen Schritte zur Bearbeitung der exportierten Rohdaten für die Verwendung in der Simulation; alle Höhenangaben in $\mu$ m.....	92
<b>Abb. 5-2</b> Darstellung des mittels Oberflächenprofilometer aufgenommene Profilansicht einer Zeile ohne Reinigung der Probe .....	93
<b>Abb. 5-3</b> Vergleich der Aufnahmen von optischen – und Konfokal-Mikroskop; Höhenangaben in $\mu$ m.....	94
<b>Abb. 5-4</b> Darstellung des Verlaufs der Brechzahl von Corning 7980 nach der Sellmeier-Gleichung, Sellmeier-Koeffizienten aus: [Cor2012] .....	96
<b>Abb. 5-5</b> Colormap der nachfolgenden Abbildungen.....	98
<b>Abb. 5-6</b> Darstellung der gemessenen Strahlprofile und Spektren der drei verwendeten Laser .....	99
<b>Abb. 5-7</b> Bildlicher Vergleich der simulierten und mittels Kamera aufgenommener Beugungsbilder .....	101
<b>Abb. 5-8</b> Darstellung der 0. Beugungsordnung des simulieren und real aufgenommenen Beugungsbildes im Vergleich zur Vorgabe .....	104

<b>Abb. 5-9</b>	Beispielhafte Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit Leistungsschwankungen; $\Delta x_{DOE} = 25 \mu\text{m}$ ; 200fache Vergrößerung.....	106
<b>Abb. 5-10</b>	Darstellung der relativen Leistungsschwankung in Abhängigkeit des Ortes für eine zufällig erzeugte Schwankung links: aller 32 und rechts: 64 Elemente .....	106
<b>Abb. 5-11</b>	Colormap der Abbildungen mit einer Wellenlänge von 532 nm.....	107
<b>Abb. 5-12</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene relative Leistungsschwankungen.....	108
<b>Abb. 5-13</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit dem Auslassen der Strukturierung von definierten Zeilen.....	109
<b>Abb. 5-14</b>	Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit deutlicher Sichtbarkeit der Ablagerungen bei 2000facher Vergrößerung; ungereinigter Zustand des DOEs.....	109
<b>Abb. 5-15</b>	Schematische Darstellung der einzelnen Abläufe zur Simulation von Ablagerungen auf den DOE-Strukturen; $S_{Max,Out,rel} = 0,1$ ; $S_{Max,In,rel} = 0,03$ .....	110
<b>Abb. 5-16</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Höhenstufen der Ablagerungen.....	112
<b>Abb. 5-17</b>	oben: Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit Kennzeichnung der Breite der Pixel und Stege, Vergrößerung: links: 2000; rechts: 4000; unten links: NANOFOCUS-Aufnahme mit 100facher Vergrößerung; unten rechts: DEKTAK-Aufnahme; alle Darstellungen nach der Reinigung.....	113
<b>Abb. 5-18</b>	Schematische Darstellung der Algorithmus-Schritte zur Erstellung von Stegen; grau: beliebiger Phasenunterschied; schwarz: Phasenunterschied 0.....	114
<b>Abb. 5-19</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Stegbreiten.....	114
<b>Abb. 5-20</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit Kantenglättung für verschiedene Parameter des Glättungsoperators .....	116
<b>Abb. 5-21</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Querschnitt; blau: Beugungsbild ohne Filter; rot: Beugungsbild mit Gauß-Filter ( $5 \times 5, \sigma = 1,0$ ); normiert auf die elektrische Feldstärke des Beugungsbildes mit Filter $ E _{5,1}$ ; links: kompletter Querschnitt; rechts: nur Anfangsbereich .....	117
<b>Abb. 5-22</b>	Darstellung der Ergebnisse verschiedener Glättungstechniken; blau: ungeglättete Phasenlage; rote Kreise: Stützstellen; links: Magenta: Gauß-Filter, grün: kubische Spline-Interpolation; rechts: rot: kubisch hermitesche Spline-Interpolation.....	118
<b>Abb. 5-23</b>	Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit verschiedenen kubisch hermiteschen Interpolationen.....	119
<b>Abb. 5-24</b>	Darstellung erhaltenen Querschnitte für: blau: ohne Interpolation; rot: mit Interpolation $N_{spline} = 5$ ; links: Interpolation nur in x-Richtung; rechts: Interpolation in x- und y-Richtung; beide Darstellungen normiert auf die elektrische Feldstärke mit Interpolation $ E _5$ .....	120

## Tabellenverzeichnis

<b>Tab. 3-1</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von der Anzahl an Iterationsschritten.....	14
<b>Tab. 3-2</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Verdeutlichung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Entfernung.....	18
<b>Tab. 3-3</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Anzahl an Diskretisierungsstufen.....	22
<b>Tab. 3-4</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Veränderungen des entstehenden Beugungsbildes bei drei und vier Diskretisierungsstufen.....	31
<b>Tab. 3-5</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Größe des Beugungsbildes in verschiedenen Entfernungen und für drei verschiedenen Strahlradien sowie des Erscheinungsbildes in kurzen Entfernungen .....	33
<b>Tab. 3-6</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Überabtastung.....	40
<b>Tab. 3-7</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Überabtastung im Nahfeld.....	44
<b>Tab. 3-8</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Pixelgröße als Vielfaches der Mindestpixelgröße .....	48
<b>Tab. 3-9</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes vom verwendeten Strahlradius .....	49
<b>Tab. 3-10</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Verwendung eines abweichenden Strahlradius ...	52
<b>Tab. 3-11</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes vom lateralen Versatz der Strahlquelle.....	57
<b>Tab. 3-12</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Wellenlänge.....	58
<b>Tab. 3-13</b>	Übersicht der Parameter zur Bestimmung des Einflusses nichtebener Wellenfronten .....	61
<b>Tab. 3-14</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung des Einflusses eines vom idealen Gaußstrahl abweichenden Strahlprofils .....	64
<b>Tab. 3-15</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der verschiedenen Testparameter für die drei Methoden M1 bis M3 .....	69
<b>Tab. 4-1</b>	Zusammenfassung der wichtigsten Parameter der Grafikkarte: NVIDIA Tesla C2075 .....	75

<b>Tab. 4-2</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Abbildung in der Brennebene einer Linse .....	78
<b>Tab. 4-3</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der vom Abbildungsmaßstab abhängigen Abbildung .....	88
<b>Tab. 5-1</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Phasenverteilung des zu erzeugenden DOEs sowie der abzubildenden Teststruktur.....	91
<b>Tab. 5-2</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Beugungsbilder mit realen Strahlprofilen und Höhenunterschieden.....	102
<b>Tab. 5-3</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von der Laserleistungsschwankung .....	107
<b>Tab. 5-4</b>	Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von Ablagerungen .....	111

## Formelverzeichnis

<i>Formelzeichen</i>	<i>Bedeutung</i>	<i>SI-Einheit</i>
$a$	Gegenstandsweite	m
$a'$	Bildweite	m
$a_{ap}$	Größe der Begrenzung durch quadratische Apertur	m
$A_{In}$	Innerer Bereich eines Pixels	—
$A_{Out}$	Äußerer Bereich eines Pixels	—
$A_0$	Abstrahlfläche	m <sup>2</sup>
$A_1$	Abbildungsfläche	m <sup>2</sup>
$B_1 - B_3, C_1 - C_3$	Sellmeier-Koeffizienten	—, m <sup>2</sup>
$C$	Proportionalitätsfaktor zwischen Reizstärke und wahrgenommener Intensität	—
$d$	Abstand der beiden Grenzflächen der Linse	—
$D$	Summe der quadratischen Abweichungen	—
$D_{Gauß}$	Durchmesser eines Gaußstrahles mit relevant hoher Feldstärke	m
$d_R$	Abstand der darzustellenden Struktur vom Bildrand	m
$D_x, D_y$	Ausdehnungen in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$D_{x,Bild}, D_{y,Bild}$	Bildgröße in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$\Delta D_{rel}$	Relative Änderung der Bildgröße durch die Bandbreite des verwendeten Lasers	—
$E_1$	Berechnete elektrische Feldstärke auf der Abbildungsfläche	$\frac{V}{m}$
$ E_B $	Geforderte Amplitudenverteilung der elektrischen Feldstärke in der Bildebene	$\frac{V}{m}$
$ E'_B $	Berechnete Amplitudenverteilung der elektrischen Feldstärke in der Bildebene	$\frac{V}{m}$
$E''_B$	Geforderte Amplitudenverteilung der elektrischen Feldstärke mit berechneter Phasenlage $E'_B$ von in der Bildebene	$\frac{V}{m}$
$E_{DOE}$	Vorliegende elektrische Feldstärke in der DOE-Ebene	$\frac{V}{m}$
$E'_{DOE}$	Berechnete elektrische Feldstärke in der DOE-Ebene	$\frac{V}{m}$

$E''_{DOE}$	Vorliegende elektrische Feldstärke multipliziert mit der berechneten Phasenlage $\varphi_{DOE}$ in der DOE-Ebene	$\frac{V}{m}$
$E_{max,00}$	Amplitude der elektrischen Feldstärke des Grundmodes	$\frac{V}{m}$
$E_{S0}$	Ankommende elektrische Feldstärke auf der Abstrahlfläche	$\frac{V}{m}$
$f$	Gegenstandsseitige Brennweite	m
$f'$	Bildseitige Brennweite	m
$f, g$	Zwei beliebige Funktionen	—
$F, G$	Fourier-Transformierte der zwei beliebigen Funktionen	—
$F$	Blendenzahl	—
$g$	Grenzwert, ab welchem eine Beschneidung der elektrischen Feldstärke oder Intensität erfolgt	—
$f_p$	Repetitionsrate	Hz
$h$	Filterkern eines Gaußfilters normiert auf die Summe $S$ aller Kern-Elemente $h_g(n_1, n_2)$	—
$H$	Fluenz	$\frac{J}{m^2}$
$i$	Imaginäre Einheit	—
$I$	Intensität	$\frac{W}{m^2}$
$\vec{k}$	Wellenvektor der elektromagnetischen Welle	$m^{-1}$
$k_0$	Kreiswellenzahl der elektromagnetischen Welle	$m^{-1}$
$l$	Bezeichnung der Maxima, gibt Name einer Beugungsordnung an	—
$L$	Linsenterm	—
$l, p$	Ordnung einer Gauß-Laguerre-Mode	—
$m$	Bezeichnung der Minima	—
$m, n$	Ordnung einer Gauß-Hermite-Mode	—
$M^2$	Beugungsmaßzahl	—
$M(x, y)$	Gesamte räumliche Modulation	—
$M_x(x, y), M_y(x, y)$	Räumliche Modulation in $x$ - und $y$ -Richtung	—
$\vec{n}$	Normalenvektor der Abstrahlfläche	m
$n_L$	Brechzahl der Umgebungsluft	—
$n_{Lin}$	Brechzahl der Linse	—

$n_S$	Brechzahl des Substrats	—
$n_0$	Brechzahl zwischen Abstrahl- und Abbildungsfläche	—
$N$	Anzahl der aufgenommenen Bilder für die HDR-Aufnahme	—
$N(x_0, y_0, z_0)$	Neigungsfaktor	—
$N_{gx}, N_{gy}$	Größe des Filter-Kerns in $x$ - und $y$ -Richtung	—
$N_{Rand}$	Anzahl der vom Rand aus gezählten Elemente	—
$N_{Spline}$	Abstand der von den Sprungstellen aus gezählten Elemente	—
$N_x, N_y$	Elementanzahl in $x$ - und $y$ -Richtung	—
$N_{x,DOE}, N_{y,DOE}$	Anzahl der Pixel in $x$ - und $y$ -Richtung	—
$N_{x,IFTA}, N_{y,IFTA}$	Anzahl der Pixel in $x$ - und $y$ -Richtung, die im IFTA verwendet werden	—
$N_{z,DOE}$	Anzahl der verschiedenen $z$ -Koordinaten des DOEs	—
$N_{ÜA}$	Anzahl an Überabtastung	—
$o$	Bezeichnung der Unterordnung	—
$p$	Anzahl an Diskretisierungsstufen	—
$P$	Numerisch berechnete Leistung in der Bildebene	W
$P_{S,Max,rel}$	Maximale relative Leistungsschwankung	—
$P_0$	Im Strahlprofil in der DOE-Ebene enthaltene Leistung	W
$r$	Abstand zwischen Abstrahl- und Abbildungselement	m
$\vec{r}$	Vektor zwischen Abstrahl- und Abbildungselement	m
$R(\Delta z_0)$	Krümmungsradius der Wellenfront eines Gaußstrahls	m
$R, R_0$	Reizstärke und Schwellenreizstärke	a. u.
$R_1, R_2$	Krümmungsradius der 1. und 2. Grenzfläche der Linse	m
$S_{Max,Out,rel}$	Maximaler relativer Grenzwert für Ablagerungen in den Randbereichen eines Pixels	—
$S_{Max,In,rel}$	Maximaler relativer Grenzwert für Ablagerungen in den inneren Bereichen eines Pixels	—
$T_1, T_2, L, S$	Strahlmatrizen	—
$T_B$	Belichtungsdauer	s
$u, v$	Indizes der Matrizen	—
$u', v'$	Indizes der Teilmatrizen	—
$V(x, y)$	Gesamter räumlicher Verlauf der Ordnungen	—

$V_x(x, y), V_y(x, y)$	Räumlicher Verlauf der Ordnungen in $x$ - und $y$ -Richtung	—
$w_\sigma(\Delta z)$	Strahlradius auf Basis des 2. Moments in der Entfernung $\Delta z$	m
$w_{0,\sigma}$	Tailenradius auf Basis des 2. Moments	m
$w_{0,\sigma,IFTA}$	Tailenradius auf Basis des 2. Moments der im IFTA verwendet wurde	m
$w_{0,\sigma,Abb}$	Tailenradius auf Basis des 2. Moments der zur Berechnung der Abbildung verwendet wurde	m
$\Delta w$	Relative Strahlradiusabweichung zwischen dem Strahlradius im IFTA und zur Berechnung der Abbildung	—
$x_M, y_M$	Verschiebung der Strahlquelle	m
$x_{Max}(l)$	$x$ -Koordinate des $l$ . Maximums	m
$x_{Min}(m)$	$x$ -Koordinate des $m$ . Minimums	m
$x_0, y_0, z_0$	Kartesische Koordinaten auf der Abstrahlfläche	m
$x_1, y_1, z_1$	Kartesische Koordinaten auf der Abbildungsfläche	m
$\Delta x, \Delta y$	Elementgröße in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$\Delta x', \Delta y'$	Elementgröße in $x$ - und $y$ -Richtung durch Überabtastung	m
$\Delta x_{DOE}, \Delta y_{DOE}$	Pixelgröße in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$\Delta x_{DOE,Min}$	Mindestpixelgröße in $x$ -Richtung	m
$\Delta x_{Steg,rel}$	Relative Breite der Stege bezogen auf die Pixelgröße	—
$\langle x \rangle, \langle y \rangle$	1. Moment bzw. Schwerpunkt in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$\langle x^2 \rangle, \langle y^2 \rangle$	2. Moment in $x$ - und $y$ -Richtung	m <sup>2</sup>
$\langle xy \rangle$	2. Moment in $xy$ -Richtung	m
$y'_m$	Bildgröße der $m = l$ -ten Ordnung	
$z_{Abb}$	$z$ -Position der Abbildungsebene nach der Linse	m
$z_{DOE}$	Ausgemessene $z$ -Koordinaten des DOEs	m
$z_i$	$z$ -Position der $i$ . Grenzfläche	m
$z_{L2}$	Lage der 2. Linse	m
$z_{R,\sigma}$	Rayleigh-Länge auf Basis des 2. Moments	m
$Z_w$	Wellenimpedanz	$\Omega$
$z_0$	Tailenposition	m
$\Delta z$	Abstand von Abstrahl- und Abbildungsfläche	m



$\Delta z_{Abb}$	Abstand von der zugeordneten Abbildungsebene von der DOE-Ebene	m
$\Delta z_{Fern}$	Beginn des Fernfeldes	m
$\Delta z_L$	Verschiebung der Linse entlang der optische Achse	m
$\Delta z_0$	Entfernung der DOE-Ebene von der Tailenposition	m
$\beta'$	Abbildungsmaßstab	—
$\delta$	Delta-Distribution	—
$\delta_{0l}$	Kronecker-Delta	—
$\eta$	Beugungseffizienz	—
$\eta_{num}$	Numerisch berechnete Beugungseffizienz	—
$\lambda_{Abb}$	Wellenlänge zur Berechnung der Abbildung	m
$\lambda_{FWHM}$	Bandbreite des Spektrums	m
$\lambda_{IFTA}$	Wellenlänge zur Berechnung der Phasenlage im IFTA	m
$\lambda_0$	Wellenlänge der elektromagnetischen Welle im Vakuum	m
$\bar{\lambda}$	Schwerpunktswellenlänge des Spektrums	m
$\sigma$	Standartabweichung des Gauß-Filters	—
$\sigma_m$	Strahlwinkel der $m = l$ -ten Ordnung zur optischen Achse	rad
$\nu_x, \nu_y$	Raumfrequenzen in $x$ - und $y$ -Richtung	$m^{-1}$
$\Delta \nu_x, \Delta \nu_y$	Elementgröße der Raumfrequenzen in $x$ - und $y$ -Richtung	$m^{-1}$
$\varphi_{Ab}$	Phasenlage mit Ablagerungen	rad
$\varphi_D$	Diskretisierte Phasenlage in der DOE-Ebene	rad
$\varphi_{DOE}$	Berechnete Phasenlage in der DOE-Ebene	rad
$\varphi_{Int}$	Interpolierte Phasenlage in $x$ -und $y$ -Richtung	rad
$\varphi_L$	Linsenterm als Phasenlage	rad
$\varphi_{Max}$	Maximum der Phasenlage aus den Interpolationen in $x$ - und $y$ -Richtung	rad
$\varphi_{Min}$	Minimum der Phasenlage aus den Interpolationen in $x$ - und $y$ -Richtung	rad
$\varphi_{Mittel}$	Gemittelte Phasenlage aus den Interpolationen in $x$ - und $y$ -Richtung	rad
$\varphi_{Red}$	Reduzierte Phasenlage	rad

$\varphi_S$	Phasenlage mit Schwankunge	rad
$\varphi_x$	Interpolierte Phasenlage in $x$ -Richtung	rad
<i>Berechnungsvorschriften</i>		
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation	—
$\mathcal{F}^{-1}$	Inverse Fourier-Transformation	—
$H_{m/n}(x)$	Hermiteische Polynome	—
$L_p^l(x)$	Laguerre-Polynome	—
$\mathbf{P}$	Anwendung eines Propagationsoperators	—
$\mathbf{P}^{-1}$	Anwendung eines inversen Propagationsoperators	—
$\text{sgn}(x)$	Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)	—
$\lfloor \ ]$	Abrunden	—

## 0 Einleitung

### 0.1 Motivation

Mit der Weiterentwicklung der verfügbaren Rechentechnik zu immer schnelleren und leistungsfähigeren Prozessoren, sowie immer größeren Rechenkapazitäten, hat die Simulation physikalischer Prozesse in den letzten Jahren einen rasanten Aufschwung erhalten. Auch die Entwicklung speziell auf numerische Simulationen ausgelegter Grafikkarten hat diesen Prozess vorangetrieben. Konkret auf dem Gebiet der Laserstrahl- bzw. allgemein der Wellenpropagation existieren mittlerweile viele kommerziell erhältliche Programme, die die Berechnung der Wellenausbreitung auf der Grundlage verschiedener physikalischer Modelle ermöglichen. Jedoch ist die Auswahl von Programmen zum Design von diffraktiven optischen Elementen (DOE) (siehe 1.1) eingeschränkt.

Aus diesem Grund, sowie hoher Lizenzkosten kommerzieller Programme, wurde bereits in der Masterarbeit von Herrn Falko Jahn M.Sc. [Jahn2012] ein Programmmodul entwickelt, welches die Berechnung von diffraktiven optischen Elementen nach einem iterativen Verfahren ermöglicht. Auch zur Untersuchung der Grundlagen und des Verständnisses von diffraktiven Elementen waren diese Arbeiten notwendig.

In der vorangegangenen Bachelorarbeit [Olb2009] entstand ein Programm, welches die Berechnung der Laserstrahlpropagation nach dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral ermöglicht. Im Rahmen der belegten Forschungsmodule [Olb2011] und [Olb2012] während des Masterstudiums wurden weitere Berechnungsvarianten und -alternativen untersucht. Ebenso waren der Import realer Strahlverteilungen sowie deren Charakterisierung ein Arbeitsschwerpunkt.

Das VIP-Projekt LAMIDIRE beschäftigt sich mit der Erzeugung von DOE mittels Strukturierung in Quarzglas. Die angefertigte Masterarbeit soll dazu beitragen die bisherigen Grundkenntnisse zu erweitern und den Einfluss verschiedener Parameter auf die entstehenden Beugungsbilder aufzuzeigen. Dank der nötigen Vorkenntnisse, in Bezug auf Berechnung der Laserstrahlpropagation, kann an dieser Stelle direkt an die vorherigen Arbeiten angeknüpft werden. Das neu gewonnene Wissen kann einen wichtigen Beitrag zum Gelingen des Projektes liefern.

## 0.2 Aufgabenstellung

Ziel der Arbeit ist die Verifizierung der verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten durch den Vergleich mit den real erhaltenen Ergebnissen. Dazu sollen real erzeugte Strukturen mit verschiedenen Methoden ausgemessen und in die Simulation übertragen werden. Die Gegenüberstellung simulierter und tatsächlicher Beugungsbilder ist ein Gegenstand der Arbeiten.

Ebenso steht die Vertiefung der Kenntnisse über diffraktive optische Elemente und der Einflüsse unterschiedlicher Parameter im Vordergrund. Die Entwicklung und Untersuchung verschiedener Algorithmen zum Design der Strukturen soll geringe Priorität erhalten. Die gewonnenen Erkenntnisse können als Erklärungen für eventuell auftretenden Abweichungen zwischen Simulation und realen Ergebnissen herangezogen werden. Die Entwicklung von Lösungsstrategien und möglichen Verbesserungen der hergestellten Strukturen soll ebenfalls thematisiert werden.

Da DOEs in immer mehr Gebieten und Bereichen Anwendung finden, wie z. B. als Strahlteiler, sind auch ihre Eigenschaften in Bezug auf Ausbreitung und Abbildung von besonderen Interesse.

Zum Erreichen der Ziele sollen Ansätze und Methoden erarbeitet werden. Die notwendigen Funktionen und Skripte werden in MATLAB entwickelt.

## 1 Stand der Technik

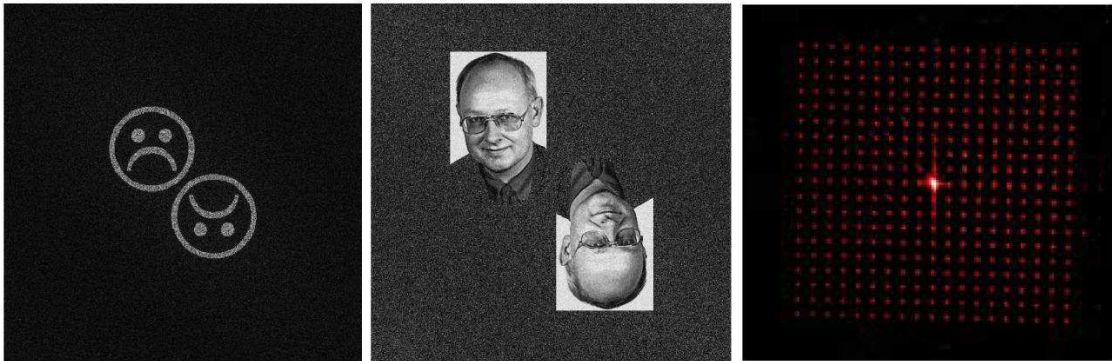
### 1.1 Diffraktive optische Elemente

Als diffraktive optische Elemente (DOE) werden Objekte bezeichnet, welche die Strahlverteilung gezielt durch Beugungserscheinungen beeinflussen. Die Beeinflussung kann durch Amplitudenmodulation, Phasenänderung oder einer Kombination aus beiden Verfahren erfolgen. Dies kann entweder in Transmission oder in Reflexion geschehen. Jeweils ein Beispiel der verschiedenen Möglichkeiten ist in **Abb. 1-1** dargestellt.



**Abb. 1-1** Darstellung möglicher Varianten eines DOE, links: Transmissions-Amplituden-DOE, Mitte: Transmissions-Phasen-DOE, rechts: Reflexions-Phasen-DOE, aus [Jahn2012]

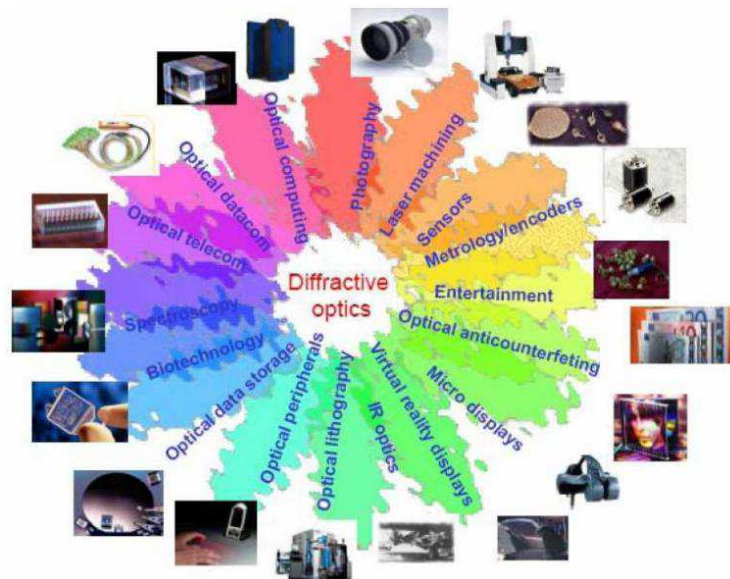
Durch die gezielte Beeinflussung von Amplitude und/oder Phase können beliebige Beugungsbilder erzeugt werden. Beispiele für erzeugbare Strahlverteilungen sind vorgegebene binäre Bilder, reale Fotografien oder Strahlteiler wie in **Abb. 1-2**.



**Abb. 1-2** Darstellung einiger Beispiele für berechnete (links und Mitte) und real erzeugte (rechts) Beugungsstrukturen, links und Mitte aus [Gues2005], rechts aus [Stan2002]

## 1.2 Anwendungen von diffraktiven optischen Elementen

Wie bereits unter 0.1 beschrieben hat die computergestützte Berechnung der Wellenausbreitung und damit auch die Berechnung und Entwicklung von diffraktiven optischen Elementen einen großen Aufschwung erhalten. Im gleichen Zuge sind auch die Anwendungsgebiete von DOE stark angewachsen, so dass dieses Gebiet hier nur angeschnitten werden kann. Wie zahlreich die Anwendungen sind, wird sehr gut durch **Abb. 1-3** dargestellt.

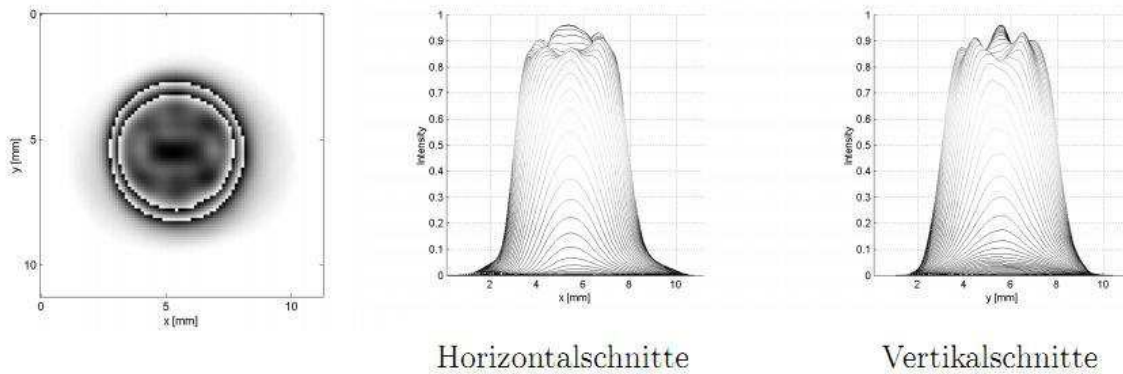


**Abb. 1-3** Schematischer Überblick ausgewählter Anwendungsgebiete von diffraktiven optischen Elementen aus [Petz2009]

Speziell für das Gebiet der Lasermaterialbearbeitung ist die Strahlformung und Strahlteilung von Interesse. Durch die gezielte Formung beliebiger Intensitätsverteilungen können bessere Arbeitsergebnisse bei verschiedenen Anwendungen erzielt werden. So sind die Erzeugung eines sogenannten „Sesselpfils“ für das Härten oder die Homogenisierung bzw. Erzeugung eines Top-Hat Profils z. B. für Maskenprojektionen als Beispiele zu nennen. Aufgrund des hohen Interesses an dieser Thematik haben sich bereits einige Arbeitsgruppen damit auseinander gesetzt. Zur Verdeutlichung sind verschiedene Beispiele in **Abb. 1-4** dargestellt.

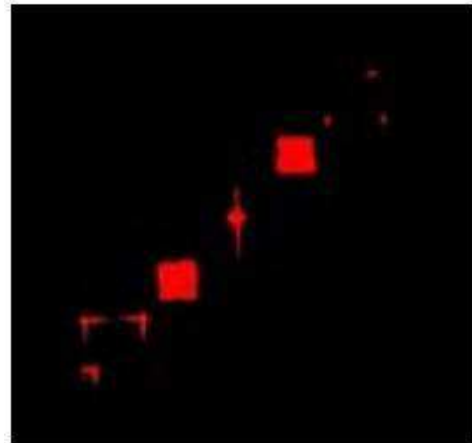
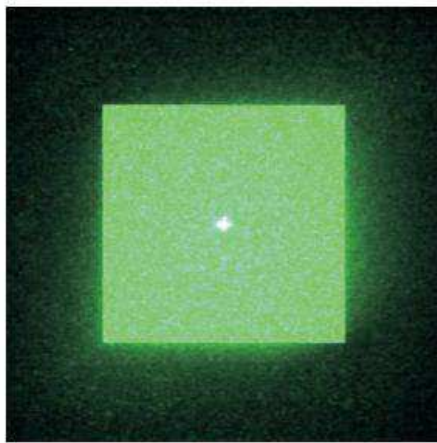
Stetig steigt auch die Zahl der Anwendungen im Bereich der Optik, Photonik und Lasertechnik. Immer mehr klassische Bauelemente, wie Linsen oder Spiegel, werden durch DOE ersetzt [Bri2005]. Ein Vertreter dieser Kategorie ist z. B. eine Fresnel-Linse [Kres2009].

*Simuliertes Fernfeldbeugungsbild eines Excimer-Laserstrahls mit partiell-kohärentem Design aus [Sch2001]*



*Fotografiertes mittels DOEs erzeugtes Top-Hat-Profil aus [Petz2009]*

*Fotografierte mittels DOEs erzeugte Gauß-Quadrat-Umwandlung aus [Stan2002]*



**Abb. 1-4** Beispiele für Strahlformung mit Hilfe von DOE

### 1.3 Herstellungsverfahren von diffraktiven optischen Elementen

Ein weiterer Grund für den starken Aufschwung diffraktiver optischer Elemente ist, dass die technologischen Voraussetzungen für deren Herstellung erst in den vergangenen Jahren entstanden oder ausreichend weiterentwickelt wurden. Daher sollen im Weiteren einige Herstellungsverfahren kurz angerissen werden. Für ausführliche Erklärungen wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Prinzipiell können die Strukturen direkt auf einem Substrat (direkt schreibende Verfahren) oder mit Hilfe von sogenannten Mastern bzw. mittels Produktreplikation erzeugt werden [Bri2005]. Ob die Strukturen in Transmission oder Reflexion verwendet werden, spielt für den Fertigungsprozess keine Rolle. Das direkte Einschreiben kann mit Hilfe eines Laser- oder Elektronenstrahls oder durch verschiedene Lithografiertechniken, wie z. B. Laser- oder Elektronenstrahlolithografie, erfolgen. Spezielle Verfahren aus dem Bereich der Lithografie

ermöglichen sogar die Erzeugung von nahezu kontinuierlichen Höhenprofilen [Stan2002]. Ebenso sind kleine Strukturen mit sehr hoher lateraler Auflösung mit den genannten Verfahren problemlos herstellbar. Wie klein die Strukturen werden, hängt u. a. vom gewählten Photoresist und der verwendeten Dosis ab [Stan2002]. Strukturbreiten kleiner als 1  $\mu\text{m}$  sind möglich.

Zu den Verfahren, die einen sogenannten Master im Vorfeld erzeugen, gehört u. a. das Präzisionsblankpressen. Dieses wird bei der Firma Schott angewandt. Durch Strukturierung mittels Ionenätzen wird eine meist 8 oder 16 stufige Pressform in einem Substrat erzeugt. Anschließend wird ein Glassubstrat erhitzt und unter hohem Druck gegen die zuvor erzeugte Pressform gedrückt [Petz2009].

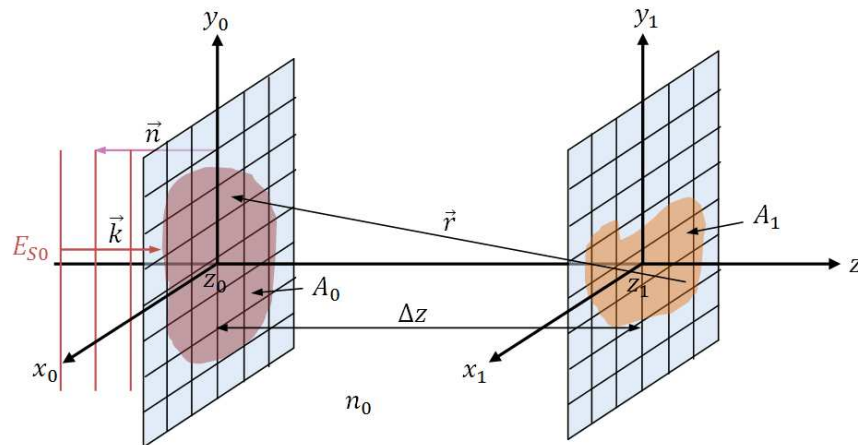
Im VIP-Projekt LAMIDIRE erfolgt die definierte Erzeugung der gewünschten Struktur durch Ablation quadratischer Pixel aus einem Quarzglassubstrat mit Hilfe eines Fluorlasers. Durch Maskenprojektion wird die gewünschte Pixelgröße auf dem Substrat eingestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein selbst berechnetes DOE nach dem beschriebenen Verfahren erzeugt.



## 2 Theoretische Betrachtungen

### 2.1 Propagationsoperatoren

Auf eine beliebig geformte Fläche  $A_0$ , an einer Position  $z = z_0$  mit dem eigenen kartesischen Koordinatensystem  $x_0, y_0$ , fällt eine elektromagnetische Welle mit der elektrischen Feldstärke  $E_{S0}$  ein (siehe **Abb. 2-1**). Nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip ist jeder Punkt, der von einer Wellenfront erfasst wird, Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Die resultierende elektrische Feldstärke  $E_1$  auf einer Fläche  $A_1$ , an einer Position  $z = z_1$  mit dem eigenen kartesischen Koordinatensystem  $x_1, y_1$ , entsteht durch Superposition aller von der Fläche  $A_0$  ausgehenden Elementarwellenanteile. Dieser Sachverhalt ist mathematisch im sogenannten Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral formuliert. Neben dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral stehen noch weitere Möglichkeiten bzw. Formulierungen zur Berechnung der Wellenpropagation zur Verfügung. Diese wurden bereits in Vorarbeiten (siehe [Olb2011]) vorgestellt und sind daher nachfolgend kurz ohne weitere Erklärungen aufgelistet.



**Abb. 2-1** Schematische Darstellung der Abstrahl- und Abbildungsfläche sowie der verwendeten Variablen

Die elektrische Feldstärke  $E_1$  entsteht durch Anwendung einer Formulierung des Beugungsintegrals auf die Feldstärke  $E_{S0}$ . Die nachfolgenden Formulierungen stellen somit einen Operator dar. Da mit ihnen die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen berechenbar ist, werden sie auch als Propagationsoperatoren bezeichnet.

*Das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral:*

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \cdot \oiint_{A_0} \frac{E_{S0}(x_0, y_0, z_0)}{r} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r} \cdot N(x_0, y_0, z_0) dA_0 \quad (2-1)$$

$$\text{mit } N(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} (\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{k}))$$

$$\text{und } r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

*Das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral:*

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{A_0} E_{S0} \cdot \frac{(1 - i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r) \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r}}{r^2} \cdot N(x_0, y_0, z_0) \, dA_0$$

$$\text{mit } N(x_0, y_0, z_0) = \cos(\vec{n}, \vec{r}) \quad (2-2)$$

$$\text{und } r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

*Die Fresnel-Näherung in Integralform:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\Delta z} \right)}}{\Delta z} \iint_{A_0} E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0^2 + y_0^2)} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0 x_1 + y_0 y_1)} \, dx_0 dy_0 \quad (2-3)$$

*Die Fraunhofer-Näherung in Integralform:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\Delta z} \right)}}{\Delta z} \iint_{A_0} E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0 x_1 + y_0 y_1)} \, dx_0 dy_0 \quad (2-4)$$

*Die Fresnel-Näherung im Spektralraum:*

$$E_1 = e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}(E_{S0}) \cdot e^{-i\pi \frac{\lambda_0 \cdot \Delta z}{n_0} (v_x^2 + v_y^2)} \right] \quad (2-5)$$

Zur Unterscheidung wird die Fresnel-Näherung im Spektralraum fortan als Fresnel spektral bezeichnet.

*Das Winkelspektrum ebener Wellen:*

$$E_1 = \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}(E_{S0}) \cdot e^{2\pi i \cdot \Delta z \cdot \sqrt{\frac{n_0^2}{\lambda_0^2} - (v_x^2 + v_y^2)}} \right) \quad (2-6)$$

Anzumerken ist, dass das Winkelspektrum ebener Wellen dem Rayleigh-Sommerfeldschem Beugungsintegral entspricht. Sollen die Operatoren numerisch ausgeführt

werden, ist eine Diskretisierung notwendig. Dadurch berechnen sich die Raumfrequenzen für (2-5) und (2-6) nach [Trä2007]:

$$\text{Raumfrequenzen (1)} \quad \Delta x \cdot \Delta v_x = \frac{1}{N_x} \quad v_x = -\frac{N_x}{2} \Delta v_x \dots \frac{N_x}{2} \Delta v_x \quad (2-7)$$

Die Elementgröße wird bestimmt durch:

$$\text{Elementgröße} \quad \Delta x = \frac{D_x}{N_x - 1} \quad (2-8)$$

$D_x$  bezeichnet die Ausdehnung einer Fläche und  $N_x$  die Elementanzahl in  $x$ -Richtung.

Weiterhin existieren noch die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation (DFT):

*Die Fresnel-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F} \left( E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} \cdot (x_0^2 + y_0^2)} \right) \quad (2-9)$$

*Die Fraunhofer-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F} (E_{S0}) \quad (2-10)$$

Die Raumfrequenzen für (2-9) und (2-10) berechnen sich nach:

$$\text{Raumfrequenzen (2)} \quad v_x = \frac{n_0 \cdot k_0}{2\pi \cdot \Delta z} x_1 = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} x_1 \quad v_y = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} y_1 \quad (2-11)$$

Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems mit:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}} \quad (2-12)$$

kann (2-9) und (2-10) auch als Fast Fourier-Transformation (FFT) ausgeführt werden. Die Beziehungen gelten in gleicher Weise für die  $y$ -Richtung. Daher wird auf diese in den weiteren Betrachtungen nicht explizit eingegangen. Durch (2-8) ist die Abgrenzung der Flächen vorgegeben.

Die verschiedenen Propagationsoperatoren führen bei gleicher Hardwarekonfiguration und Aufgabenstellung zu unterschiedlichen Berechnungsdauern und unterliegen gewissen Einschränkungen. Operatoren auf Basis der FFT sind besonders zur Berechnung der Propagation von einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu einer anderen Ebene ebenfalls senkrecht

zur Ausbreitungsrichtung geeignet. Sie zeichnen sich durch einen enormen Geschwindigkeitsvorteil gegenüber Operatoren in Integralform aus. Die Fresnel-Näherung im Spektralraum ist bei einer Elementanzahl von  $N_x = N_y = 2^{11}$  etwa 1,2 Millionen Mal schneller als das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral (vgl. [Olb2012]). Jedoch haben die Operatoren in Integralform die Möglichkeit zur unabhängigen Koordinatenwahl von Abstrahl- und Abbildungsfläche, was bei Operatoren auf Basis der FFT nicht der Fall ist. Für weitere Einschränkungen und Besonderheiten der Operatoren wird an dieser Stelle jedoch auf die Untersuchungen im Vorfeld [Olb2012] verweisen.

## 2.2 Berechnung diffraktiver optischer Elemente

Die Berechnung von DOE kann durch verschiedene Methoden erfolgen. Dazu zählen u. a. analytische, geometrische und iterative Verfahren (vgl. [Gues2005], [Kres2009] und [Stan2002]). Analytische und geometrische Verfahren haben den Nachteil, dass sie nur für Spezialfälle anwendbar und nicht universell einsetzbar sind. Daher wird im Folgenden nur ein Beispiel für ein iteratives Verfahren behandelt: der iterative Fourier-Transformations-Algorithmus (IFTA) nach Gerchberg und Saxton.

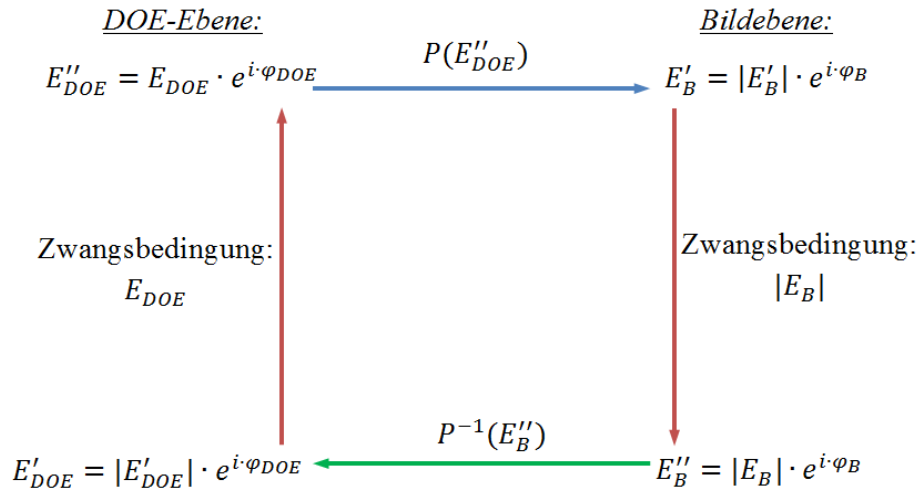
Der Algorithmus von Gerchberg und Saxton wurde Anfang der 1970er Jahre zur Berechnung von computergenerierten Hologrammen entwickelt und zeichnet sich durch seine Einfachheit aus. Die Berechnung von computergenerierten Hologrammen gleicht der Berechnung von DOEs, wodurch der Algorithmus ohne Bedenken verwendet werden kann. Neben diesem einfachen Algorithmus existieren noch zahlreiche weitere, wie z. B. iterative Verschachtelungen oder Verbesserungen in der Effizienz durch veränderte Quantisierungsbedingungen wie die Soft-Quantization nach Wyrowsky [Jahn2012]. In den weiteren Schritten soll jedoch der ursprüngliche Algorithmus von Gerchberg und Saxton im Mittelpunkt stehen.

Er beruht auf dem Prinzip, dass wiederholt zwischen Bild- und DOE-Ebene hin und zurück gerechnet wird. Die Feldstärkeverteilung wird in jeder Ebene durch sogenannte Zwangsbedingungen angepasst. Die Berechnung kann mit einem beliebigen Propagationsoperator aus 2.1 erfolgen. Voraussetzung ist, dass sich dieser Operator für die Rückrechnung von der Bildebene in die DOE-Ebene invertieren, z. B. inverse Fourier-Transformation und negative Entfernung  $\Delta z$ , lässt. Aufgrund des Geschwindigkeitsvorteils sind Operatoren auf Basis der FFT den Operatoren in Integralform vorzuziehen. Die Fraunhofer-Näherung mittels FFT (**2-10**) bietet sich besonders an. Für eine hinreichend große Entfernung, streng genommen im Unendlichen, und für ein konstantes Betrachtungsgebiet nähert sich der Vorfaktor der Fraunhofer-Näherung, der eine sphärische Phasenänderung darstellt, einem konstanten Wert an. Er kann dadurch

vernachlässigt werden. Parallele Wellenfronten liegen vor. Die Berechnung von der DOE- zur Bildebene erfolgt nur durch Fourier-Transformation und die Rückrechnung entsprechend mittels inverser Fourier-Transformation. Dadurch wird das Problem der Koordinatenabhängigkeit nach (2-12) umgangen. Jedoch liegt keine definierte Entfernung vor, in welcher sich eine scharfe Abbildung in der Bildebene ergibt. Dies wird in späteren Abschnitten noch thematisiert werden.

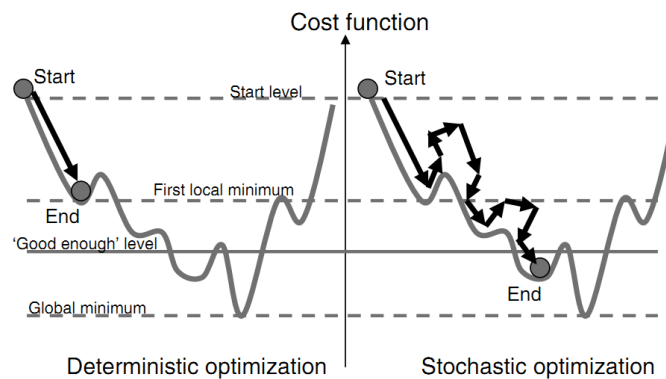
In der Bildebene wird eine räumliche Amplitudenverteilung  $|E_B|$  der elektrischen Feldstärke gefordert. In der DOE-Ebene liegt hingegen eine beliebige Verteilung  $E_{DOE}$  der elektrischen Feldstärke vor. Mit Hilfe des Algorithmus wird nun versucht eine Phasenlage in der DOE-Ebene zu berechnen, mit der die geforderte Amplitudenverteilung  $|E_B|$  aus  $E_{DOE}$  erzeugt werden kann. Dazu wird  $|E_B|$  im ersten Schritt mit einem zufälligen Phasenfaktor  $e^{i\varphi}$  multipliziert. Jedem Pixel wird damit eine zufällige Phase zugeordnet. Die entstehende Verteilung wird als  $E_B''$  bezeichnet. Diese wird in die DOE-Ebene mit Hilfe eines invertierten Propagationsoperators  $P^{-1}(E_B'')$  zurück gerechnet und die Feldstärkeverteilung  $E_{DOE}'$  entsteht. In der DOE-Ebene wird nun von  $E_{DOE}'$  die Phasenverteilung  $\varphi_{DOE}$  bestimmt, die erhaltene Amplitudenverteilung  $|E_{DOE}'|$  vernachlässigt und die Phasenlage  $\varphi_{DOE}$  mit der vorliegenden Feldstärkeverteilung  $E_{DOE}$  multipliziert. Die erhaltene Verteilung  $E_{DOE}'' = E_{DOE} \cdot e^{i\varphi_{DOE}}$  wird für die Propagation zurück zur Bildebene verwendet. In der Bildebene wird die berechnete Phasenlage  $\varphi_B$  getrennt, mit der Amplitudenverteilung  $|E_B|$  multipliziert und wieder zurück zur DOE-Ebene gerechnet. Auf jeder Ebene wird die geforderte bzw. vorliegende Amplituden- oder Feldstärkeverteilung als Zwangsbedingung verwendet und immer nur die jeweils erhaltene Phasenlage für weitere Berechnungen genutzt. Zur Veranschaulichung des Algorithmus ist dieser für einen beliebigen Propagationsoperator  $P$  in **Abb. 2-2** dargestellt. Bei jedem Durchlauf verändert sich das erhaltene Bild  $E_B'$  und konvergiert gegen einen Grenzwert.

Der Algorithmus wird solange ausgeführt bis die Abbruchkriterien erfüllt sind. Diese können z. B. eine vorgeschriebene Anzahl an Iterationsschritten sein oder die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen Zwangsbedingung  $|E_B|$  und tatsächlich berechneter Verteilung  $|E_B'|$  unterschreitet eine vorgegebene Grenze.



**Abb. 2-2** Veranschaulichung des iterativen Fourier-Transformations-Algorithmus (IFTA) nach Gerchberg und Saxton

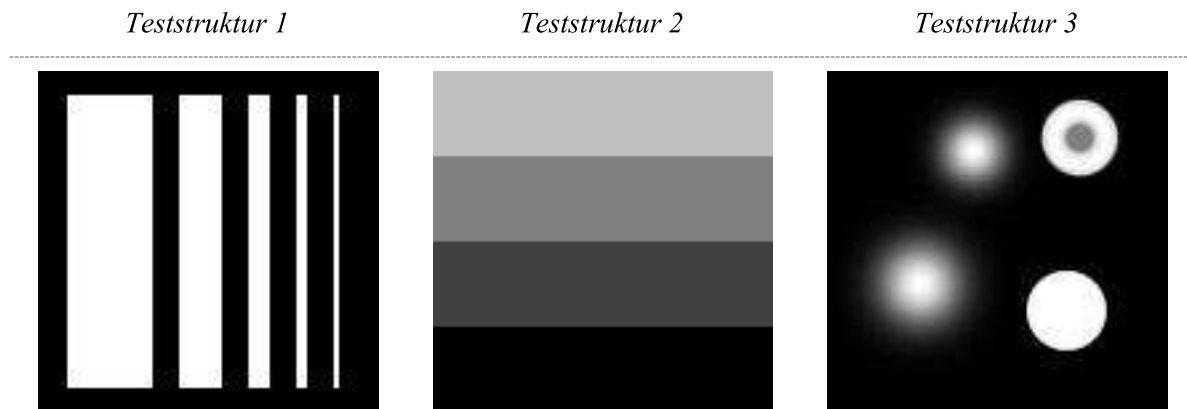
Der große Vorteil der Methode ist ihre Einfachheit. Ein Nachteil ist jedoch, dass der Algorithmus dazu neigt nicht im globalen Minimum einer sogenannten Gewinnfunktion [Kres2009] zu konvergieren, sondern gegen ein lokales Minimum strebt bzw. um einen Grenzwert schwankt. Die Gewinnfunktion kann z. B. durch die Summe der quadratischen Abweichungen oder ein anderes Kriterium repräsentiert werden. Ein besserer Algorithmus, welcher sehr häufig im globalen Minimum konvergiert, ist der Optimierungsalgorithmus Simulated Annealing. Der Algorithmus ist umfangreicher, komplexer und benötigt erheblich mehr Rechenaufwand, wodurch er hier nicht weiter thematisiert wird. Zur Verdeutlichung der Unterschiede verschiedener Algorithmen im Konvergenzverhalten sind diese schematisch in **Abb. 2-3** veranschaulicht.



**Abb. 2-3** Schematische Darstellung der Unterschiede zweier Algorithmen (links: ein iteratives Verfahren, z. B. IFTA; rechts: ein stochastisches Verfahren, z. B. Simulated Annealing) bezüglich Konvergenz; aus [Kres2009]

### 3 Abhängigkeit der Beugungsbilder von verschiedenen Parametern

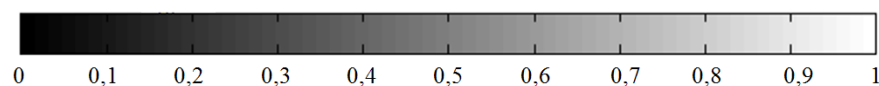
Im Folgenden sollen die Wirkungen verschiedener Parameter auf die berechneten Teststrukturen untersucht werden. Als Teststruktur werden die in **Abb. 3-1** dargestellten Bilder verwendet.



**Abb. 3-1** Darstellung der verwendeten Teststrukturen

Teststruktur 1 stellt verschiedene Rechtecke mit den Breiten: 32, 16, 8, 4 und 2 Pixel dar. Der Abstand zwischen den Strukturen beträgt jeweils 10 Pixel. Teststruktur 2 beinhaltet verschiedene homogene Grauwerte. Der Grauwert jeder Stufe steigt um 64. Teststruktur 3 verbindet Elementeigenschaften aus 1 und 2 und stellt einen Strahlteiler mit verschiedenen Profilen dar (oben links: Supergaußverteilung, rechts oben: Ringstruktur, links unten: Gaußverteilung, rechts unten: Top-Hat-Verteilung). Alle Teststrukturen haben eine Größe von  $128 \times 128$  Pixel<sup>2</sup>.

In allen nachfolgenden Abbildungen sind die Beträge der berechneten elektrischen Feldstärke auf der Abbildungsebene dargestellt. Die Darstellungen sind nur relativ, weshalb auf eine Legende verzichtet wird. Warum nur relative Angaben möglich sind, wird im Kapitel 3.4.3 erläutert. Der relativen elektrischen Feldstärke ist eine 8 Bit Grauwertskala entsprechend **Abb. 3-2** zugeordnet. Die erhaltenen Abbildungen werden als Beugungsbilder bezeichnet.



**Abb. 3-2** Verwendete Colormap in den nachfolgenden Abbildungen

### 3.1 Anzahl der Iterationsschritte

In diesem Unterkapitel soll die Abhängigkeit des erhaltenen Beugungsbildes von der Anzahl an Iterationsschritten geklärt werden.

Für die nachfolgenden Berechnungen wird die Fraunhofer-Näherung mittels FFT als Propagationsoperator verwendet, da die Berechnung sehr einfach zu realisieren ist.  $E'_B$  und  $E'_{DOE}$  werden dadurch (siehe Erläuterungen unter **2.2**) nach:

$$\begin{array}{ll} \text{Berechnung mittels} & E'_{DOE} = \mathcal{F}^{-1}(E''_B) \\ \text{Fraunhofer FFT als} & \\ \text{Propagationsoperator} & E'_B = \mathcal{F}(E''_{DOE}) \end{array} \quad (3-1)$$

berechnet. Die Iteration erfolgt von 1 bis zum aktuellen maximalen Iterationsschritt. Der Prozess wird als Durchlauf bezeichnet. Für jeden Durchlauf wird die gleiche Anfangsphase verwendet. Somit kann die alleinige Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten festgestellt werden. Zur Überprüfung der Abhängigkeit wird die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen gewünschtem Bild  $E_B$  und berechnetem Bild  $E'_B$  nach:

*Summe der quadratischen Abweichungen*

$$D = \frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_{u=1}^{N_x} \sum_{v=1}^{N_y} \left( \frac{|E'_B(u, v)|}{\max |E'_B(u, v)|} - \frac{|E_B(u, v)|}{\max |E_B(u, v)|} \right)^2 \quad (3-2)$$

bestimmt. Beide Bilder,  $E_B$  und  $E'_B$ , müssen zur Ermittlung der Summe der quadratischen Abweichungen auf 1 normiert werden. Für alle Berechnungen werden die Parameter aus **Tab. 3-1** verwendet.

**Tab. 3-1** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von der Anzahl an Iterationsschritten

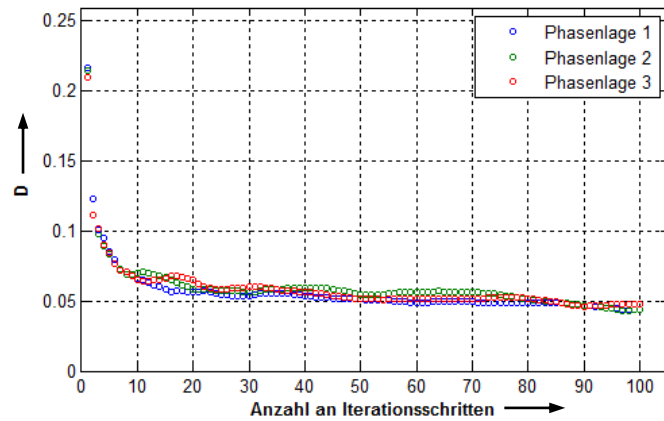
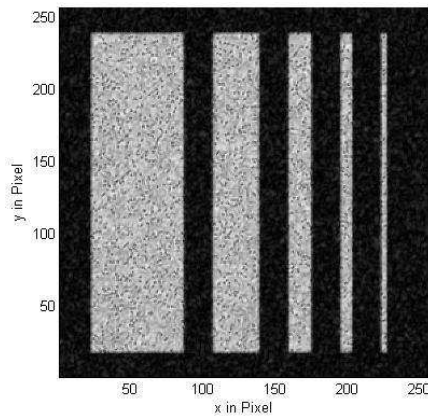
<i>DOE-Berechnung</i>	
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich
Iterationsschritte:	1 – 100
Diskretisierungsstufen $p$ :	kontinuierlich

Die erhaltene Summe ist in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten in **Abb. 3-3** dargestellt. Die dargestellten Bilder  $E'_B$  entstehen theoretisch erst im Unendlichen und sind mit

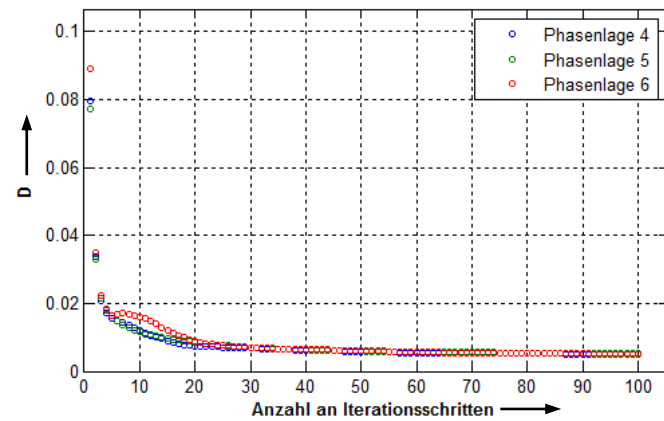
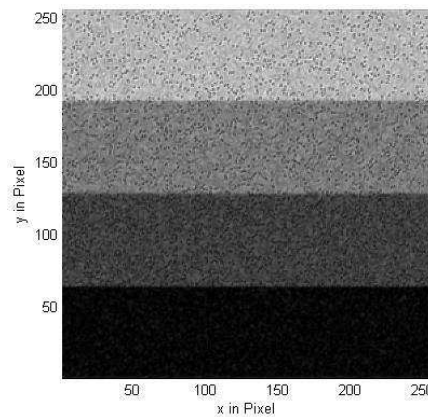


keiner  $z$ -Koordinate verknüpft, weshalb in **Tab. 3-1** auch keine Entfernung  $\Delta z$  ausgewiesen ist. Der Index  $\sigma$  des Strahlradius  $w_{0,\sigma}$  repräsentiert die Definition des Strahlradius auf Basis des 2. Moments und der Index 0 bezeichnet die Strahltaille. In der DOE-Ebene liegen demnach ebene Wellenfronten vor.

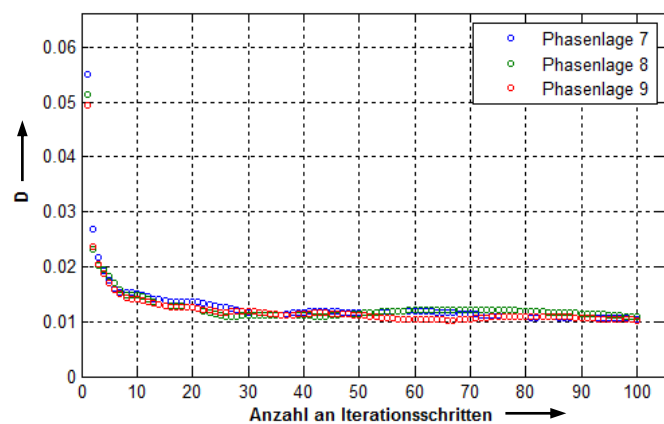
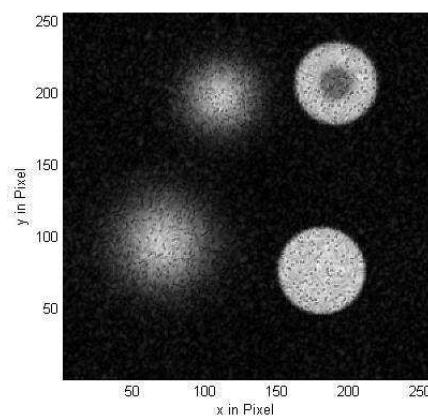
### Teststruktur 1



### Teststruktur 2



### Teststruktur 3



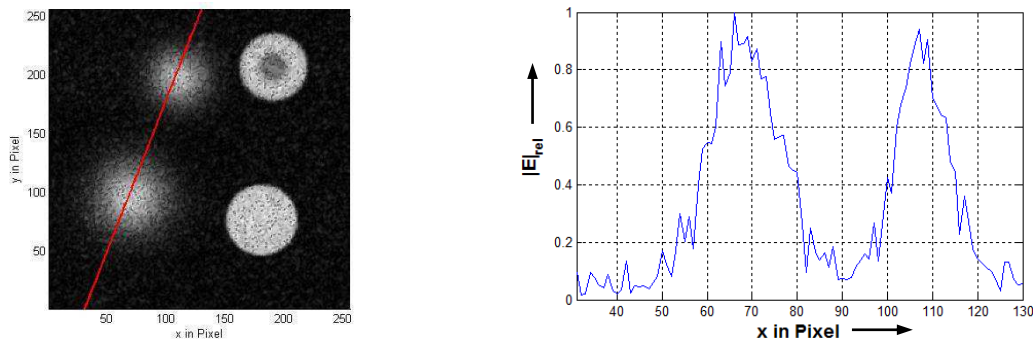
**Abb. 3-3** links: Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder  $|E_B'|$  nach 100 Iterationsschritten; rechts: Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationsschritten für jeweils drei verschiedene Anfangsphasenlagen

**Abb. 3-3** zeigt für alle drei Teststrukturen einen ähnlichen Verlauf. Zunächst nimmt die Summe der quadratischen Abweichungen ab und schwankt anschließend um einen bestimmten Grenzwert. Die Schwankungen bedeuten, dass eine hohe Anzahl an Iterationsschritten nicht zu einer geringeren Summe der quadratischen Abweichungen führen muss.

In jedem Durchlauf war die Anfangsphase gleich. Anhand des Kurvenverlaufs wird deutlich, dass sie den Verlauf der quadratischen Abweichungen und die Veränderungen des Bildes während des Algorithmus bestimmt. Nach jedem weiteren Iterationsschritt ändert sich das Beugungsbild und damit Summe der quadratischen Abweichungen. Sie folgt einem determinierten Verlauf. Einige Algorithmen nutzen deshalb die Beeinflussung der Anfangsphase um bessere Strukturen zu erhalten (vgl. [Kres2009]).

Weiterhin ist zu erkennen, dass einfache Strukturen, wie Teststruktur 2, geringere Schwankungen der Summe der quadratischen Abweichungen besitzen. Teststruktur 1 oder 3, die komplexere Figuren enthält, weisen die größten Schwankungen auf. Teststruktur 1 besitzt viele Bereiche mit hoher Feldstärke. Schwankungen in diesen Bereichen beeinflussen die Summe der quadratischen Abweichungen stärker als Schwankungen in Bereichen mit niedriger Feldstärke. Die Summe der quadratischen Abweichungen ist entsprechend die Größe von allen Strukturen.

Zur ausreichenden Näherung an den Grenzwert sind etwa 20 bis 30 Iterationsschritte notwendig. Die Berechnungen mit Hilfe eines Operators auf Basis FFT sind im Gegensatz zu einem Operator in Integralform extrem schnell. Daher können 30 Iterationsschritte gewählt werden. Ein Iterationsschritt benötigt bei den gewählten Größen nur wenige Millisekunden. Für eine höhere Elementanzahl erhöht sich entsprechend die Berechnungsdauer.



**Abb. 3-4** links: berechnetes Beugungsbild mit Kennzeichnung der Schnittlinie, rechts: relativer Feldstärkeverlauf entlang der Schnittlinie

Die erhaltenen Bilder sind dem äußeren Anschein nach den gewünschten Bildern sehr ähnlich und auch die Summe der quadratischen Abweichungen ist relativ gering. Alle Strukturen weisen Intensitätsfluktuationen auf. Die Verteilung gleicht einem Speckle-Muster. Die Fluktuationen werden daher im Weiteren als Speckle bezeichnet. Ihre Verteilung ändert sich nach jedem Iterationsschritt. Eine Verhinderung des Musters ist mit dem einfachen Algorithmus nach

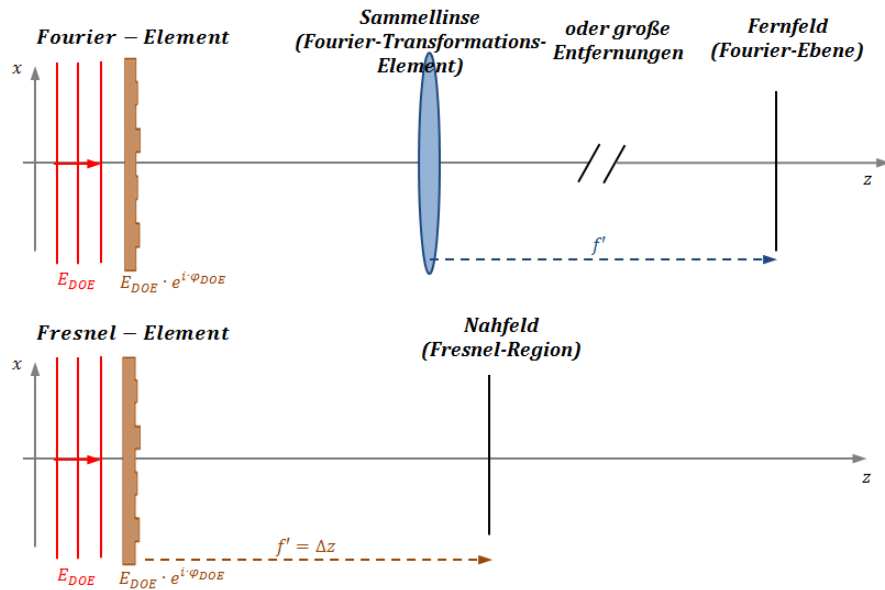
Gerchberg-Saxton nicht möglich. Sie entstehen durch sogenannte Phasensingularitäten [Sch2001]. Wenn die benachbarten Phasenwerte um ein bestimmtes Pixel in einer Art „Wendeltreppe“ bzw. „Spirale“ im Bereich von 0 bis  $2 \cdot \pi$  variieren, stellt der Phasenwert des mittleren Pixels eine Singularität dar. Er erzeugt eine Nullstelle des Wellenfeldes. Phasensprünge benachbarter Pixel von ungefähr  $\pi$  erzeugen Fluktuationen [Sch2001]. Auch die Kohärenz der Strahlquelle bedingt ihre Entstehung. Eine inkohärente Strahlquelle würde weniger Speckle-Muster erzeugen. Die Inkohärenz von Strahlanteilen stellt eine Mittelung dar. Das Beugungsbild würde verwaschen erscheinen. Die Schnittdarstellung von Teststruktur 3 in **Abb. 3-4** zeigt, dass die erhaltenen Teilprofile aufgrund der Speckle nicht wirklich dem vorgegeben Gauß- bzw. Supergaußstrahl entsprechen. Der verwendete Algorithmus ist zur Berechnung eines DOEs als Strahlteiler und separater Nutzung jedes Teilstrahles eher ungeeignet sind. Der Sachverhalt wird unter **4** noch konkretisiert, da sich das Beugungsbild nicht wie ein Laserstrahl, sondern wie ein Bild verhält.

### 3.2 Propagationsoperator

In vielen Literaturstellen werden DOE-Strukturen, welche eine Abbildung in Nahfeld bzw. an einer definierten Position  $\Delta z$  erzeugen, als Fresnel-Elemente bezeichnet. DOE-Strukturen, die eine Abbildung im Fernfeld bzw. an einer beliebigen weit entfernten Position  $\Delta z$  ermöglichen, hingegen als Fourier-Elemente (vgl. [Kres2009], [Gues2005]). Zur Verdeutlichung der beiden Methoden sind diese schematisch in **Abb. 3-5** veranschaulicht. Fresnel-Elemente können mit allen Propagationsoperatoren berechnet werden. Fourier-Elemente hingegen nur mit der Fraunhofer-Näherung ohne Vorfaktor. Bei der iterativen Berechnung sind Operatoren auf Basis der FFT den Operatoren in Integralform aufgrund der sehr viel geringeren Berechnungsdauer vorzuziehen (siehe [Olb2012]).

Die Unterschiede und Einschränkungen zwischen den verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten sollen erläutert werden. Die bisher berechneten Elemente stellen Fourier-Elemente dar, weshalb sie als erstes thematisiert werden.

**Abb. 3-5** zeigt, dass Fourier-Elemente erst in sehr großer Entfernung sichtbar werden. Nur unter der Bedingung einer sehr großen Entfernung kann die Fraunhofer-Näherung mittels FFT als einfache Fourier-Transformation (Formel (3-1)) ausgeführt werden. Daher werden die Auswirkungen einer Abbildung in einer definierten Entfernung untersucht. Für die Berechnungen werden die Parameter aus **Tab. 3-2** verwendet. Die Abbildung wird für Teststruktur 3 beispielhaft in drei verschiedenen Entfernungen berechnet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-6** zu finden.



**Abb. 3-5** Schematische Darstellung der Wirkungsweise von Fourier- und Fresnel-Elementen in Anlehnung an die Darstellungen von Kress [Kres2009]

**Tab. 3-2** Übersicht der verwendeten Parameter zur Verdeutlichung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Entfernung

	DOE-Berechnung	Abbildung
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^9, 2^{11}, 2^{13}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$18 \text{ mm}, 70 \text{ mm}, 300 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja/nein
Diskretisierungsstufen $p$ :	kontinuierlich	

Weiterhin ist in **Abb. 3-5** zu sehen, dass statt einer sehr weiten Entfernung der Abbildungsebene, die Abbildung mit Hilfe einer Sammellinse realisiert werden kann. Eine sphärische Sammellinse sorgt für eine sphärische Änderung der Wellenfront wodurch die Wirkung der Linsen durch den folgenden sphärischen Linsenterm nachempfunden werden kann:

*Sphärischer Linsenterm*

$$L = \text{sgn}(f') \cdot \sqrt{f'^2 - x^2 - y^2} \quad (3-3)$$

Die Entfernung  $\Delta z$  vom Linsenterm zur Abbildungsebene stellt die Brennweite  $f'$  dar. Im Grunde wirkt der vernachlässigte Vorfaktor bei der Fraunhofer-Näherung (2-10) auch als Linsenterm, da er eine sphärische Phasenänderung bewirkt. Der Linsenterm muss noch in eine Phasenlage

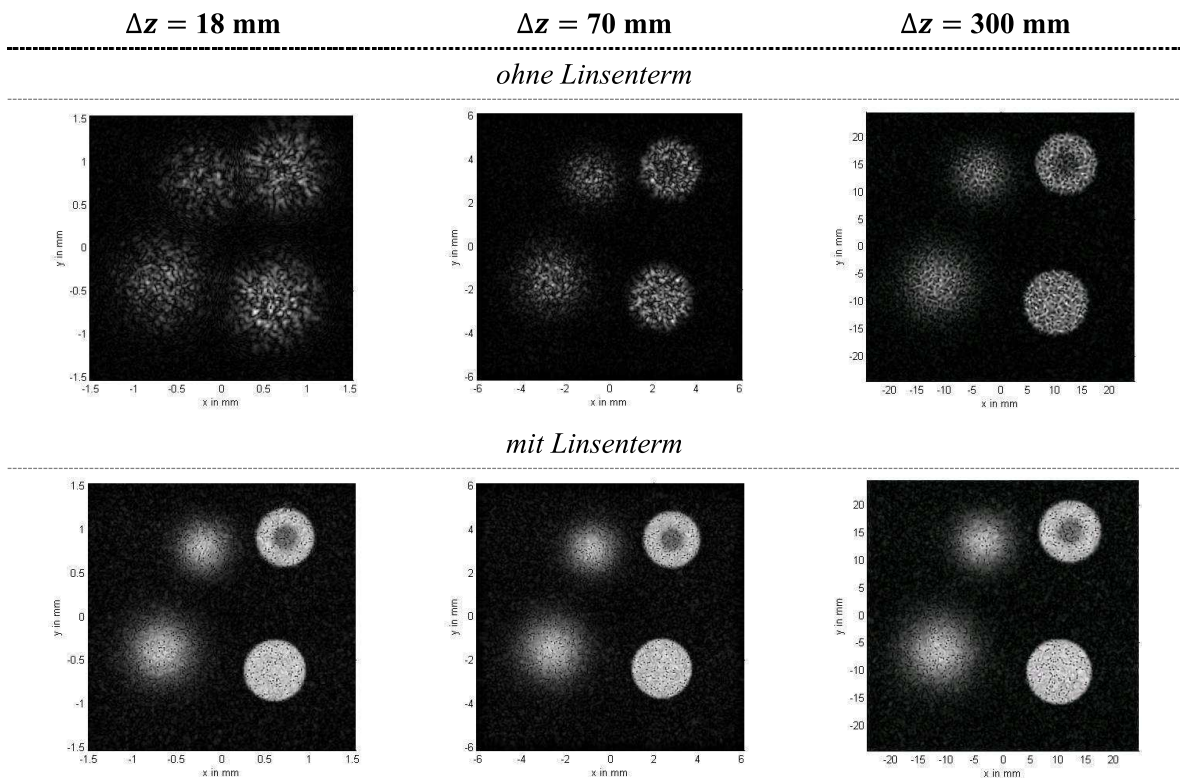
umgewandelt werden. Dazu wird eine Stufenfunktion durch Abrunden des Linsenterms und anschließende Subtraktion der Abrundung vom eigentlichen Linsenterm erzeugt und das Ergebnis mit  $k_0$  multipliziert.

*Umwandlung in  
Phasenlage*

$$\varphi_L = k_0 \cdot (L - [L]) \quad (3-4)$$

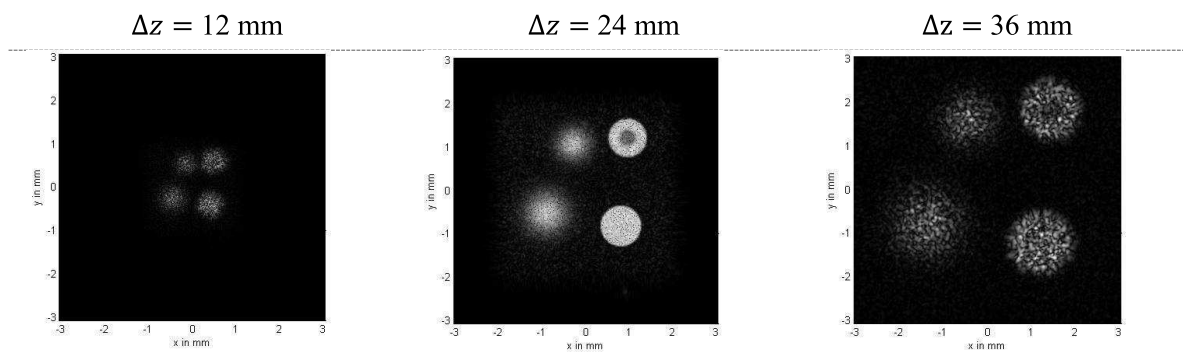
Die zusätzliche Phasenlage kann in einer definierten Entfernung zur Phasenlage des bis dahin propagierten Beugungsbild addiert werden, um die Wirkung einer Sammellinse nachzuempfinden oder sie wird zur berechneten DOE-Phasenlage addiert. Die erste Möglichkeit wird als  $2f$ -Anordnung bezeichnet und im Kapitel 4 explizit diskutiert. Die letztere Möglichkeit soll in den weiteren Betrachtungen zur Anwendung kommen. Sie wird oft als  $1f$ -Anordnung bezeichnet. Zur Verdeutlichung des Einflusses des Linsenterms auf der DOE-Struktur werden die Berechnungen für das oben genannte Beispiel erneut mit Linsenterm durchgeführt und die Ergebnisse ebenfalls in **Abb. 3-6** dargestellt. Für Berechnung werden die Parameter aus **Tab. 3-2** verwendet.

Zum vollen Verständnis der Wirkung eines Linsenterms sind noch weitere Betrachtungen notwendig. Daher wird das Beugungsbild in zwei von der Brennebene abweichenden Ebenen berechnet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-7** zu finden. Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 3-2** übernommen. Die zusätzlichen Parameter sind in der Abbildung gekennzeichnet.



**Abb. 3-6** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für Teststruktur 3 für drei verschiedene Entfernungen

Die oberen Darstellungen in **Abb. 3-6** zeigen deutlich, dass das Beugungsbild in einer kurzen Entfernung  $\Delta z$  eine anderes Erscheinungsbild als in den Darstellungen in **Abb. 3-3** hat. Die Kanten sind nicht scharf und die Homogenität der Teilstrukturen ist nicht vorhanden. Die Ursache ist, dass die Entfernung nicht ausreicht um den Bedingungen des Fernfeldes zu entsprechen. Wie groß die Entfernung sein muss um eine scharfe Abbildung zu erhalten, wird unter **3.6** thematisiert. Anhand der unteren Darstellungen ist zu sehen, dass der Linsenterm eine scharfe Abbildung in der gewählten Ebene bewirkt. Optisch ist kein Unterschied zwischen den Entfernungen erkennbar. Durch Verwendung des Linsenterms auf dem DOE ist aus dem ursprünglichen Fourier-Element ein Fresnel-Element geworden.



**Abb. 3-7** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für Teststruktur 3 für drei verschiedene Entfernungen mit Linsenterm  $f' = 24$  mm;  $N_x = 2^{10}$ ; restliche Parameter aus **Tab. 3-2**

**Abb. 3-7** verdeutlicht den Nachteil eines Linsenterms auf der DOE-Struktur. Die scharfe Abbildung ist nur für eine Entfernung  $\Delta z = f'$  gültig. Befindet sich die Abbildungsebene nicht in der Brennebene wird das Bild wieder unscharf. Die Ursache wird unter **4.2** genauer erläutert und untersucht. Die Verwendung eines Linsenterms auf dem DOE ist demnach nur sinnvoll, wenn die Entfernung  $\Delta z$  vorgegeben und konstant ist. Weiterhin ist in der Abbildung zu sehen, dass die Bildgröße mit zunehmender Entfernung größer wird, was unter **3.5.1** genauer untersucht wird.

Wird hingegen die Fresnel-Näherung im Spektralraum als Propagationsoperator im IFTA verwendet, ist kein Linsenterm für eine scharfe Abbildung in einer bestimmten Ebene notwendig. In der iterativen Berechnung ist bereits die gewünschte Entfernung enthalten. Jedoch tritt bei einer Abweichung von der berechneten Ebene der gleiche Effekt wie bei der Verwendung eines Linsenterms auf und selbst im Unendlichen wird kein scharfes Bild erzeugt. Die Verwendung der Fresnel-Näherung ist demnach für ein universell einsetzbares DOE nicht sinnvoll. Die gleichen Auswirkungen werden auch bei jedem anderen Propagationsoperator sichtbar, selbst bei der Fraunhofer-Näherung FFT mit Vorfaktor. Da die erhaltenen



Beugungsbilder anderer Operatoren denen aus **Abb. 3-6** unten gleichen, wird auf eine separate Darstellung verzichtet.

Optisch ist zwischen den Beugungsbildern, deren Phasenlage in der DOE-Ebene durch einfache Fourier-Transformation und anschließender Addition eines Linsenterms und den Bildern, deren Phasenlage in der DOE-Ebene durch einen konkreten Propagationsoperator berechnet wird, kein Unterschied zu sehen. Die erste Variante benötigt aufgrund der geringeren Anzahl an Rechenoperationen eine geringere Berechnungsdauer, weshalb sie für die weiteren Betrachtungen und Untersuchungen favorisiert wird.

### 3.3 Diskretisierungsstufen

Die Herstellung einer kontinuierlichen Phasenlage ist nicht oder nur bedingt durch einen minimalen Abtrag möglich. Die Phasenlage muss diskretisiert werden. Die Einteilung erfolgt in  $p$  Diskretisierungsstufen und wird nach:

$$\text{Diskretisierung der Phasenlage} \quad \varphi_D = \left[ (\varphi + \pi) \cdot \frac{p}{2\pi} + 0,5 \right] \cdot \frac{2\pi}{p} \quad (3-5)$$

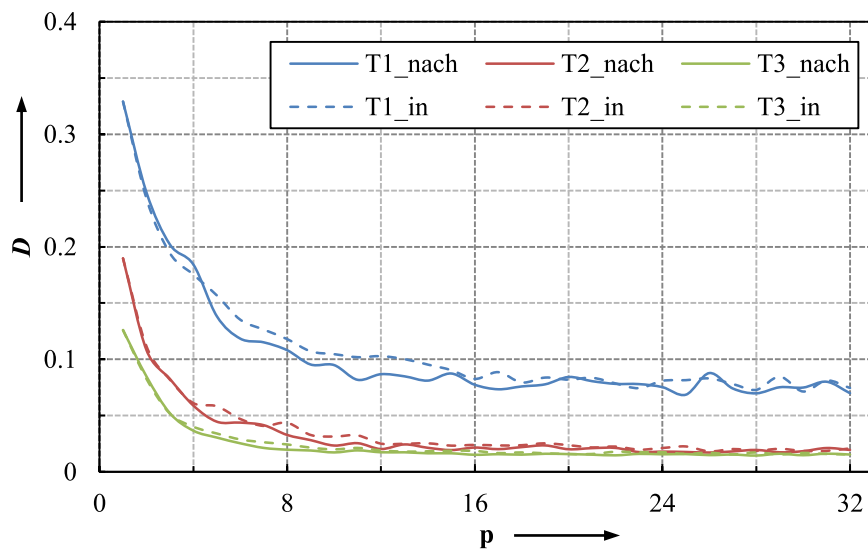
berechnet. Die maximale Phasenverschiebung beträgt  $\frac{p-1}{p} \cdot 2 \cdot \pi$ . Die nachfolgenden Untersuchungen werden durchgeführt um zu überprüfen welche Anzahl an Diskretisierungsstufen für den Erhalt einer gut sichtbaren Abbildung notwendig ist. Weiterhin ist von Interesse ob durch eine Diskretisierung während oder am Ende des Algorithmus bessere Ergebnisse erzielt werden können.

Als Qualitätsmerkmal der Beugungsbilder wird die Summe der quadratischen Abweichungen nach (3-2) zwischen Abbildung und gewünschtem Bild für verschiedene Stufen gebildet. Die Diskretisierung der Phasenlage erfolgt zum einen nach jedem Iterationsschritt und zum anderen nach dem letzten Iterationsschritt. Zur alleinigen Bestimmung der Abhängigkeit von der Anzahl an Diskretisierungsstufen wird eine zufällige Phasenlage bestimmt und diese für alle Berechnungen verwendet. Die Parameter für die Simulationen sind in **Tab. 3-3** zu finden. Für alle Berechnungen wird ein Linsenterm zum Erhalt einer scharfen Abbildung verwendet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-8** dargestellt. Die Teststrukturen sind aus Platzgründen mit T1 bis T3 abgekürzt. Die Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt wird mit „\_nach“ bezeichnet, die Diskretisierung nach jedem Iterationsschritt mit „\_in“. Zur verbesserten Übersichtlichkeit werden die Messpunkte in der Darstellung durch Spline-Interpolation miteinander verbunden und sind nicht explizit ausgewiesen.

**Tab. 3-3** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Anzahl an Diskretisierungsstufen

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^8$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$9,18 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	$1 - 32$	

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen der Diskretisierungsstufen sind die erhaltenen Beugungsbilder für Teststruktur 1 mit 2, 7, 12, 17 und 22 Diskretisierungsstufen sowie für eine kontinuierliche Phasenlage in **Abb. 3-9** visualisiert. Die Berechnung erfolgt mit den Parametern aus **Tab. 3-3**.

**Abb. 3-8** Darstellung der Abhängigkeit der quadratischen Abweichungen von der Anzahl an Diskretisierungsstufen  $p$ , durchgezogene Linien: Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt, gestrichelte Linien: Diskretisierung nach jedem Iterationsschritt

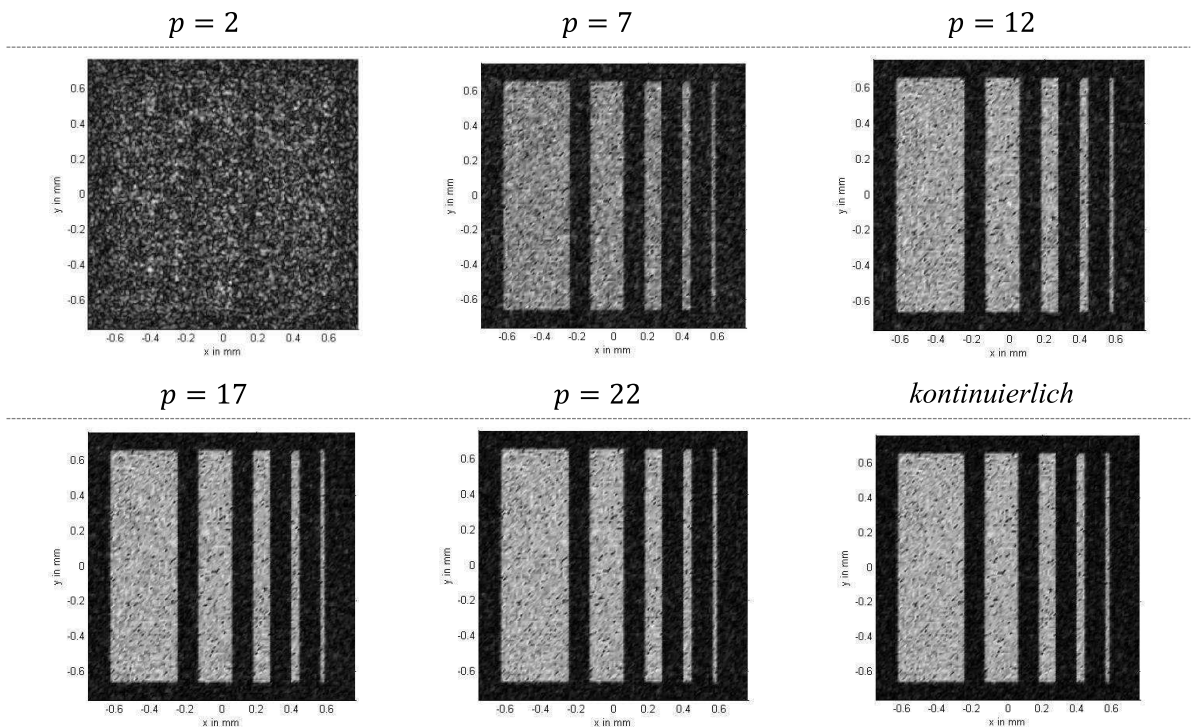
Anhand der Darstellung in **Abb. 3-8** ist kein signifikanter Unterschied zwischen der Diskretisierung nach jedem oder nach dem letzten Iterationsschritt erkennbar. Tendenziell sind die quadratischen Abweichungen nach dem letzten Iterationsschritt etwas geringer. Diese Variante weist außerdem einen geringeren Rechenaufwand auf, da nur einmal diskretisiert werden



muss. Daher wird in den weiteren Berechnungen nur die Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt verwendet.

Mit zunehmender Anzahl an Diskretisierungsstufen nimmt die Summe der quadratischen Abweichungen ab und konvergiert gegen einen Grenzwert. Die berechnete Summe ist in **Abb. 3-8** etwas größer als in **Abb. 3-3**. Der Grund ist vor allem die leicht abweichende Größe von  $|E_B|$  zu  $|E'_B|$ . In **Abb. 3-3** ist das Beugungsbild mit keinen Koordinaten verknüpft. Die beiden Bilder können direkt punktweise miteinander verglichen werden. In den Darstellungen in **Abb. 3-8** erfolgt die Berechnung einer konkreten Abbildung. Die Parameter werden so angepasst, dass die Bildgröße annähernd mit der gewählten Ausdehnung übereinstimmt, jedoch ist komplette Deckungsgleichheit nicht möglich.

Teststruktur 1 weist in ihrem Verlauf relativ große Schwankungen auf, die bereits in **Abb. 3-3** vorkommen. Die Ausprägung der Schwankungen, d. h. vor allem ihre Amplitude, wird von der Struktur selbst durch Bereiche mit hoher elektrischer Feldstärke bestimmt. Der Verlauf der Summe der quadratischen Abweichungen ist bei Diskretisierung nach jedem oder nach dem letzten Iterationsschritt nicht identisch, obwohl die gleiche Anfangsphase vorliegt. Die Diskretisierung nach jedem Iterationsschritt stellt einen Einfluss auf das Konvergenzverhalten dar.



**Abb. 3-9** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder von Teststruktur 1 für verschiedene Diskretisierungsstufen und Diskretisierung nach dem letzten Iterationsschritt

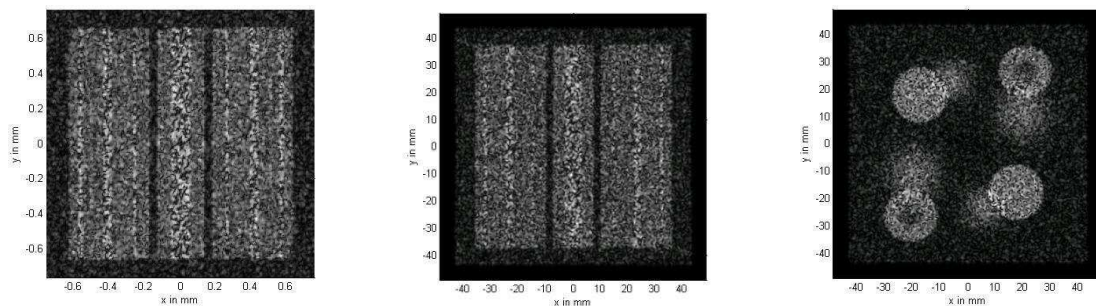
Weiterhin werden etwa 12 bis 16 Diskretisierungsstufen benötigt um annähernd die gleichen quadratischen Abweichungen wie für eine kontinuierliche Phasenlage zu erhalten, d. h. in den Bereich der Konvergenz zu gelangen. Optisch ist bereits ab 10 bis 12 Stufen kein großer Unterschied zur kontinuierlichen Phasenlage zu sehen, was **Abb. 3-9** verdeutlicht. Unterschiede existieren im Hintergrund, welcher für eine hohe Anzahl an Diskretisierungsstufen weniger Rauschen aufweist und in der Homogenität der Strukturen. Binäre Diskretisierungen erzeugen im Nahfeld auch bei Verwendung eines Linsenterms eine schlechte Abbildung. Der Grund ist, dass der Linsenterm mit 2 Diskretisierungsstufen keine Wirkung besitzt. Zur separaten Untersuchung der binären Strukturen ist ein Beispiel in **Abb. 3-10** veranschaulicht.

*Linsenterm kontinuierlich*

$\Delta z = 9,18 \text{ mm}$

*ohne Linsenterm*

$\Delta z = 550 \text{ mm}$



**Abb. 3-10** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder von Teststruktur 1 und 3 für eine binäre Diskretisierung; im Nahfeld mit kontinuierlichem Linsenterm ( $N_x = 2^8$ ) und im Fernfeld ohne Linsenterm ( $N_x = 2^{14}$ )

**Abb. 3-10** zeigt, dass mit einem kontinuierlichen Linsenterm auch im Nahfeld für binäre Diskretisierungen eine scharfe Abbildung möglich ist. Weiterhin ist das Problem binärer Strukturen besonders gut sichtbar – das Beugungsbild entsteht zwei Mal. Zum einen wie für mehrere Diskretisierungsstufen (Multilevel) und zum anderen umgekehrt und seitenvertauscht. Die Ursache ist wird im nachfolgenden Unterkapitel besprochen.

### 3.4 Unterordnungen und höhere Ordnungen

#### 3.4.1 Analytische Beschreibung und Nomenklatur

Aufgrund der räumlichen Diskretisierung in einzelne Elemente wirkt die berechnete DOE-Struktur als Gitter, wobei die Elementgröße  $\Delta x_{DOE}$  die Gitterkonstante repräsentiert. Die Lage der Maxima  $l$  und Minima  $m$  können über die analytischen Gittergleichungen beschrieben werden. Bei senkrechtem Einfall einer elektromagnetischen Welle befinden sich die Maxima und Minima an den gleichen Positionen wie am Doppelspalt [Ped2005]:

*Berechnung der Abszisse*

$$x(\sigma) = \Delta z \cdot \tan(\sigma) \quad (3-6)$$

Maxima  $l$ :

$$\text{Divergenzwinkel Maxima} \quad \sin \sigma_l = \frac{l \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} \quad (3-7)$$

$$x_{Max}(l) = \Delta z \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{l \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}\right)\right) \quad (3-8)$$

*Position der Maxima*

$$x_{Max}(l) \cong \Delta z \cdot \frac{l \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}$$

Minima  $m$ :

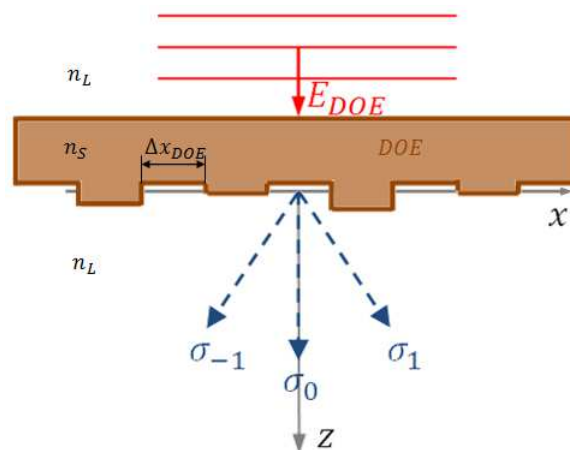
$$\text{Divergenzwinkel Minima} \quad \sin \sigma_m = \frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} \quad (3-9)$$

$$x_{Min}(m) = \Delta z \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}\right)\right) \quad (3-10)$$

*Position der Minima*

$$x_{Min}(m) \cong \Delta z \cdot \frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}$$

Die Ordnung  $l$  der Maxima bestimmt den Namen der Beugungsordnung.  $l$  und  $m$  stellen ganze Zahlen dar. Die verwendeten Gleichungen und Beziehungen gelten in analoger Weise auch für die  $y$ -Richtung, weshalb auf eine explizite Aufführung verzichtet wird. Zur Verdeutlichung sind die auftretenden Winkel der Maxima schematisch in **Abb. 3-11** dargestellt.



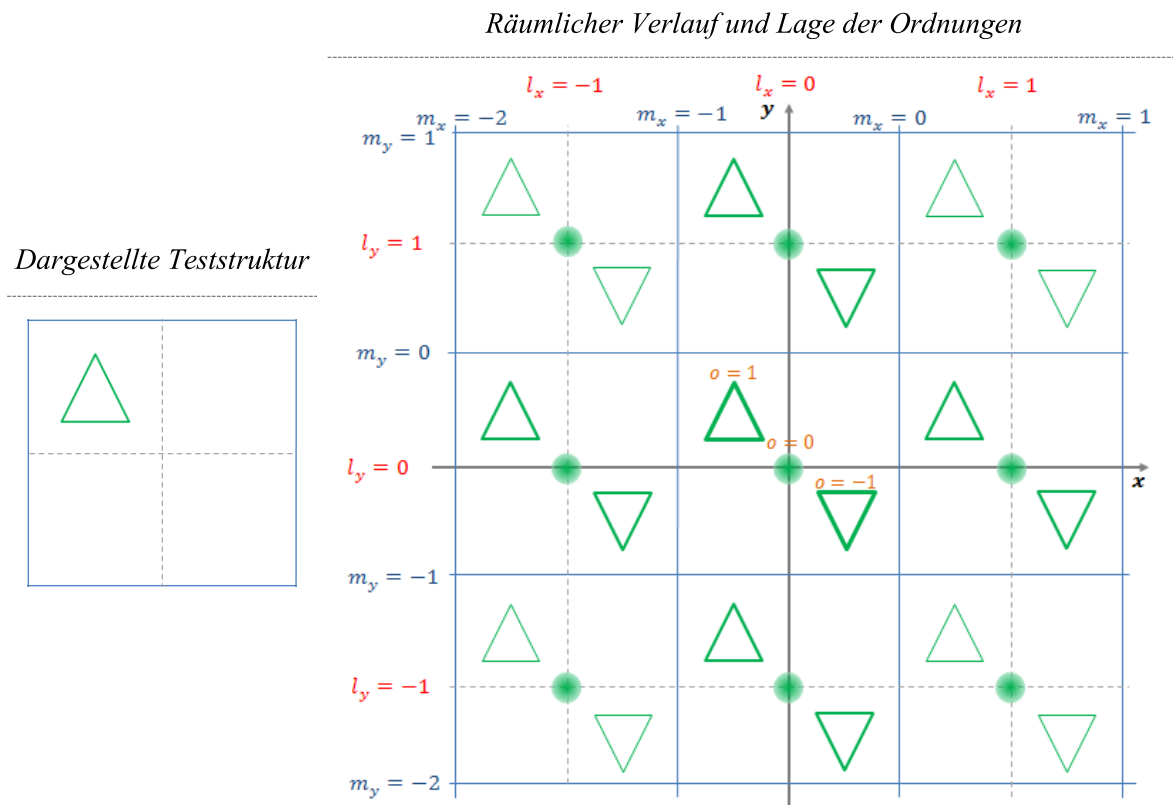
**Abb. 3-11** Schematische Darstellung der auftretenden Winkel der Maxima

Der prinzipielle räumliche Verlauf der einzelnen Ordnungen  $l$  kann über die folgenden Formulierungen beschrieben werden [Dem2006]:

$$\text{Räumlicher Verlauf in } x\text{-Richtung} \quad V_x(x, y) = \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}{\lambda_0} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{\Delta z}\right)\right)\right)}{\sin\left(\pi \cdot \frac{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}{\lambda_0} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{\Delta z}\right)\right)\right)} \quad (3-11)$$

$$\text{Gesamter räumlicher Verlauf} \quad V(x, y) = V_x(x, y) \cdot V_y(x, y) \quad (3-12)$$

Neben der Einteilung in Maxima und Minima ist jede Ordnung  $l$  in weitere Ordnungen  $o$  unterteilt.  $o$  stellt wieder eine ganze Zahl dar. Zur Unterscheidung werden die Ordnungen  $o$  im Folgenden als Unterordnungen bezeichnet. Die 0. Unterordnung stellt das Beugungsbild des Ausgangsstrahlprofils  $E_{DOE}$  dar. Sie wird nur sichtbar, wenn die DOE-Struktur bzw. die verwendeten Parameter von der Vorgabe abweichen. Die 1.- und -1. Unterordnung werden als fundamentale Ordnungen bezeichnet [Kres2009]. Die -1. Unterordnung ist die konjugierte Ordnung zur 1. Unterordnung, d. h. sie ist umgekehrt und seitenvertauscht. Zur Verdeutlichung der verschiedenen Ordnungen sind diese schematisch für eine binäre Diskretisierung mit Abweichungen von der Idealstruktur in **Abb. 3-12** dargestellt.



In der rechten Darstellung in **Abb. 3-12** ist die links befindliche Teststruktur zu sehen. Die rechte Abbildung zeigt deutlich, dass die beiden fundamentalen und die 0. Unterordnung in jeder Beugungsordnung entstehen. Auf die separate Ausweisung der Unterordnungen in allen weiteren Ordnungen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Zur vollständigen Charakterisierung einer Ordnung müssen die Indizes  $l_x$  und  $l_y$  angegeben werden. Im Weiteren werden häufig nur die Ordnungen in  $x$ -Richtung betrachtet, weshalb auf eine vollständige Nomenklatur verzichtet wird.

In **Abb. 3-12** wird deutlich, dass eine Beugungsordnung  $l$  von den Minima  $m = l$  und  $m = l - 1$  eingeschlossen wird. Die Größe einer Beugungsordnung berechnet sich demnach durch:

$$\begin{array}{l} \text{Größe einer Ordnung} \\ l = m \end{array} \quad D_{x,ord} = x_{Min}(m) - x_{Min}(m - 1) \cong \frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} \quad (3-13)$$

Die nächsthöhere Ordnung schließt immer direkt an die vorherige an und eine räumliche Trennung der Ordnungen aufgrund ihrer Divergenz ist unmöglich.

Weiterhin ist in **Abb. 3-12** noch ein weiterer Effekt angedeutet. Die Feldstärke der verschiedenen Beugungsordnungen ist mit einer Sinc-Funktion moduliert. Die Modulation resultiert ebenfalls aus der räumlichen Diskretisierung. Alle Pixel zusammen wirken als Gitter, aber jedes Pixel selbst wirkt als Spalt in  $x$ - und  $y$ -Richtung und erzeugt ein Beugungsmuster, dass sich nach [Dem2006]:

*Modulations-Funktion nach Beugung am Einzelspalt*

$$M_x(x, y) = \text{sinc} \left( \frac{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}{\lambda_0} \cdot \sin \left( \arctan \left( \frac{x}{\Delta z} \right) \right) \right) \quad (3-14)$$

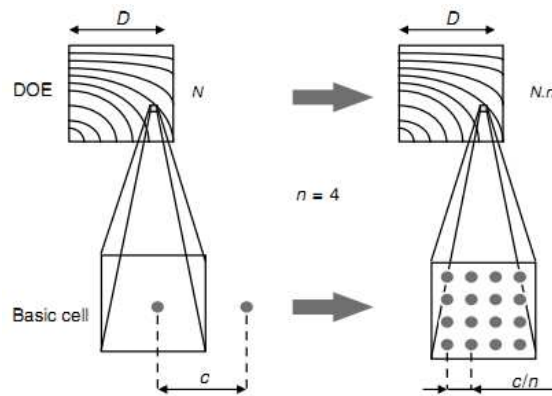
analytisch berechnen lässt. Für die  $y$ -Richtung gilt die Beziehung analog. Da die Modulation in  $x$ - und  $y$ -Richtung erfolgt, wird die Gesamtmodulation nach:

$$\text{Gesamtmodulation} \quad M(x, y) = M_x(x, y) \cdot M_y(x, y) \quad (3-15)$$

bestimmt. Die Gesamtmodulation bildet die Einhüllende der Beugungsordnungen. Die Modulation und die Sichtbarkeit höherer Ordnungen werden in den beiden nachfolgenden Unterkapiteln explizit diskutiert.

### 3.4.2 Einfachabtastung

In diesem Unterkapitel soll die Sichtbarkeit von höheren Ordnungen und den Unterordnungen bei einfacher Abtastung untersucht werden.



**Abb. 3-13** Skizze zur Verdeutlichung der Unterschiede von Einfachabtastung (links) und Überabtastung (rechts); aus [Kres2009]

Einfachabtastung bedeutet, dass die Elementgröße zur Berechnung der Abbildung mit der Pixelgröße übereinstimmt. Bei Überabtastung wird ein Pixel in mehrere kleinere Elemente unterteilt, die einen einheitlichen Wert besitzen. Der Unterschied zwischen beiden Varianten wird in **Abb. 3-13** deutlich.

### Unterordnungen

Zunächst sollen die Unterordnungen thematisiert werden. Wie **3.3** bereits zeigt, ist bei einer binären Diskretisierung die 1.- und die -1. Unterordnung sichtbar. Die Ausprägung einer Ordnung kann mit der sogenannten Beugungseffizienz  $\eta$  beschrieben werden. Sie ist ein Maß dafür, wie viel Prozent der Gesamtleistung in einer einzelnen Ordnung enthalten ist. In vielen Literaturstellen, wie z. B. [Petz2009] oder [Gues2005], wird die Beugungseffizienz als Verhältnis von Intensität in der DOE-Ebene zur Intensität einer Ordnung definiert. Diese Definition für die Untersuchungen nicht sinnvoll. Unter der Annahme, dass die Gesamtleistung konstant bleibt (Streuung, Reflexion und Absorption vernachlässigt) und der Tatsache, dass die einzelnen Beugungsordnungen eine viel größere Fläche besitzen als das Ausgangsstrahlprofil, muss die Intensität der Ordnungen immer wesentlich geringer sein, als die Intensität in der DOE-Ebene. Darüber hinaus geht nicht eindeutig hervor, ob die Angabe auf die maximale, mittlere oder eine andere Definition der Intensität bezogen ist.

Zur Abschätzung der Beugungseffizienz können analytische Formeln von Blaze-Gittern herangezogen werden.

*Formel (1) zur Abschätzung der Beugungseffizienz einer Unterordnung o nach [Kres2009]*

$$\eta_o^p = \left[ \frac{\sin\left(\frac{o \cdot \pi}{p}\right)}{\frac{o \cdot \pi}{p}} \right]^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{o}{p}\right) \quad (3-16)$$

Formel (3-16) gilt exakt nur für ein Blaze-Gitter und kann deswegen nicht alle Effekte erklären. So kann sie nur auf die Unterordnungen angewandt werden. Auch kann sie nicht für alle Unterordnungen Gültigkeit haben, da die 0. Unterordnung für jede Diskretisierungsstufe eine Beugungseffizienz von 1 erhalten würde. Wird stattdessen nur die 1. Unterordnung betrachtet, ergeben sich sinnvolle Ergebnisse. Daher soll im Folgenden die Beugungseffizienz der 1. diskutiert werden.

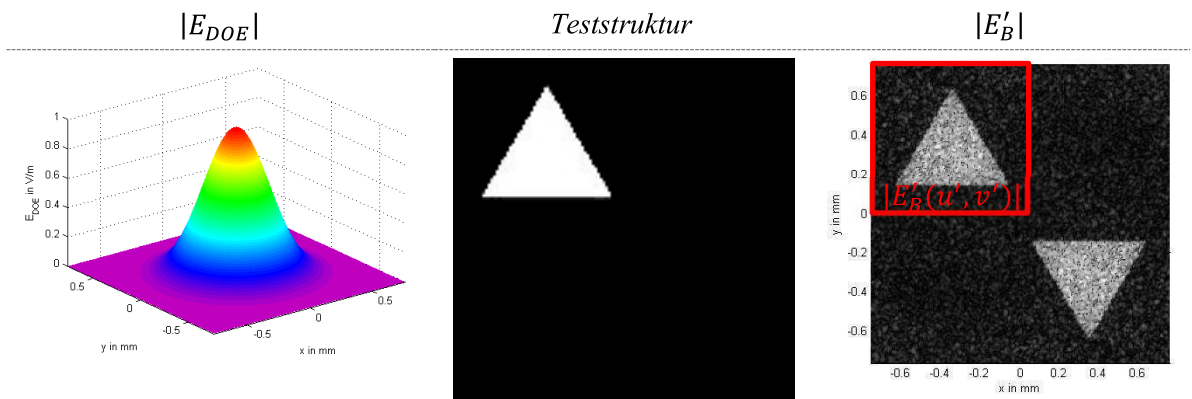
Allgemein kann die Beugungseffizienz numerisch über:

$$P_0 = \sum_u \sum_v |E_{DOE}(u, v)|^2$$

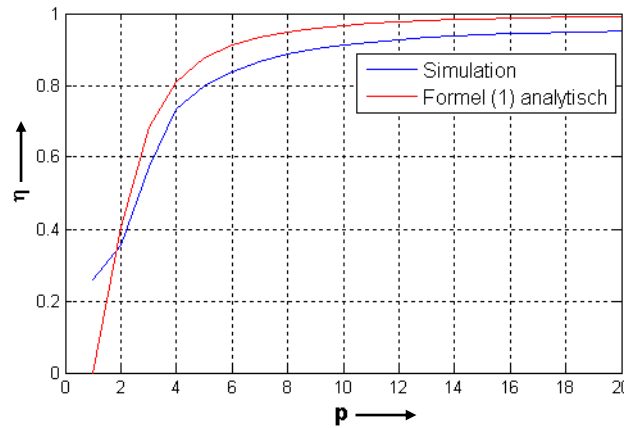
*Numerische Berechnung der Beugungseffizienz*

$$\eta_{num} = \frac{1}{P_0} \cdot \sum_{u'} \sum_{v'} |E'_B(u', v')|^2 \quad (3-17)$$

berechnet werden. Die Variablen  $u$  und  $v$  repräsentieren die Indizes der Matrizen. Die numerische Berechnung soll als Vergleichsgröße zu Formel (3-16) herangezogen werden. Für die numerische Bestimmung der Beugungseffizienz wird eine asymmetrische und nicht zentrische Teststruktur gewählt. Zur alleinigen Bestimmung der Beugungseffizienz der 1. Unterordnung wird die Leistung nur innerhalb des in **Abb. 3-14** rot gekennzeichneten Bereichs berechnet. Dies ist nicht ganz korrekt. Die 1. Unterordnung deckt den kompletten Ausschnitt ab. Da aber z. B. die -1. Unterordnung bei binärer Diskretisierung überlagert ist, würde sie das Ergebnis noch stärker verfälschen. Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 3-3** verwendet. Die numerischen Effizienzen werden aufgrund der statistischen Schwankungen aus 5 Simulationen arithmetisch gemittelt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-15** veranschaulicht.



**Abb. 3-14** Darstellung der verwendeten Variablen und Größen, sowie der Teststruktur zur numerischen Bestimmung der Beugungseffizienz;  $p = 2$



**Abb. 3-15** Gegenüberstellung der numerisch bestimmten und analytisch berechneten Beugungseffizienz

**Abb. 3-15** zeigt, dass **(3-16)** für die 1. Unterordnung Gültigkeit besitzt. Die Abweichungen resultieren aus dem zu geringen Ausschnitt der 1. Unterordnung. Weiterhin ist die numerisch bestimmte Beugungseffizienz bei nur 1 Diskretisierungsstufe größer als die analytische Formel angibt. Die Ursache ist, dass die eingeschlossene Leistung des Ausgangsstrahlprofils im genannten Bereich berechnet wird. Für 1 Diskretisierungsstufe erfolgt keine Änderung des Ausgangsstrahlprofils. Wird Formel **(3-16)** auf höhere Unterordnungen angewandt, ergeben sich keine sinnvollen Ergebnisse. Die höheren Unterordnungen sind deshalb Gegenstand der nachfolgenden Ausführungen.

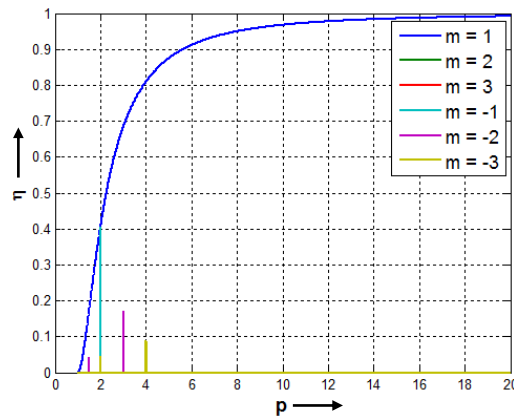
Die -1. Unterordnung verschwindet durch mehr als 2 Diskretisierungsstufen, was nach **(3-16)** nicht erfolgt. Ebenso würden alle höheren Ordnungen auch an Beugungseffizienz zunehmen, was einen Verstoß gegen den Energieerhaltungssatz darstellt. Kress liefert, im Gegensatz zu anderen Literaturstellen, noch eine weitere Formel.

*Formel (2) zur Abschätzung der Beugungseffizienz einer Unterordnung o nach [Kres2009]*

$$\eta_o^p = \left[ \frac{\sin(\pi(o - \kappa))}{\sin\left(\frac{\pi(o - \kappa)}{p}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{o \cdot \pi}{p}\right)}{o \cdot \pi} \right]^2 \quad (3-18)$$

$\kappa$  repräsentiert einen Gütefaktor der Herstellung. Für eine ideale Herstellung gilt  $\kappa = 1$ . Mit dieser Formel werden die Effizienzen der -3. bis -1. und 2. bis 3. Unterordnung aus **Abb. 3-16** berechnet. Eine Berechnung der Beugungseffizienz der 1. Unterordnung ist mit **(3-18)** nicht möglich, weshalb die Effizienz nach **(3-16)** bestimmt wird.





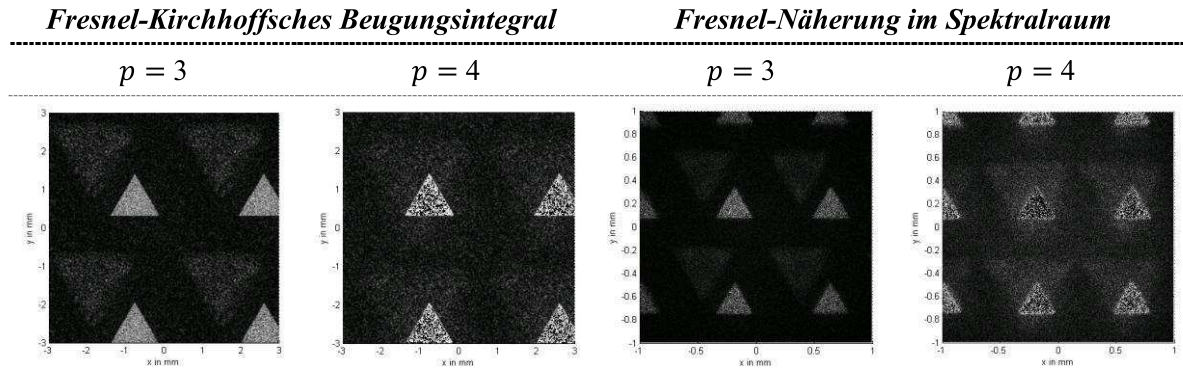
Beugungseffizienz in %						
$p$	$\eta_1$	$\eta_{-1}$	$\eta_2$	$\eta_{-2}$	$\eta_3$	$\eta_{-3}$
2	40,5	40,5	0	0	4,5	4,5
3	68,4	0	0	17,1	0	0
4	81,1	0	0	0	0	9
8	95,0	0	0	0	0	0
16	98,7	0	0	0	0	0

**Abb. 3-16** Darstellung der berechneten Beugungseffizienzen der einzelnen Ordnungen für verschiedene Diskretisierungsstufen nach (3-16) und (3-18)

Nach **Abb. 3-16** müssten für drei Stufen die -2. Unterordnung, sowie für vier Stufen die -3. Unterordnung sichtbar werden. Für deren Nachweis werden verschiedene Simulationen mit Hilfe des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral und der Fresnel-Näherung im Spektralraum durchgeführt. Für die Fresnel-Näherung im Spektralraum werden die Parameter aus **Tab. 3-4** verwendet. Für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral wird ein Strahlradius von  $w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$ , eine Entfernung von 20 mm, eine quadratische Begrenzung mit  $D_x = D_y = 6 \text{ mm}$  und eine Elementanzahl von  $2^9$  ebenfalls in beide Richtungen verwendet. Die restlichen Parameter werden aus **Tab. 3-4** übernommen. Für  $p = 4$  ist eine Beschneidung von Feldstärkewerten größer als  $0,5 \cdot |E_{\text{Max}}|$  notwendig. Die Unterordnungen sind anderenfalls kaum sichtbar. Zwei ausgewählte Beispiele sind in **Abb. 3-17** veranschaulicht.

**Tab. 3-4** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Veränderungen des entstehenden Beugungsbildes bei drei und vier Diskretisierungsstufen

	DOE-Berechnung	Abbildung
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 1500 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 1500 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^{10}$	$2^{10}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	5 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	3 – 4	



**Abb. 3-17** Gegenüberstellung der berechneten Beugungsbilder der verwendeten Teststruktur aus **Abb. 3-14**, simuliert mit dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral und der Fresnel-Näherung im Spektralraum für verschiedene Diskretisierungsstufen

Anhand von **Abb. 3-17** wird deutlich, dass der Nachweis der oben genannten Unterordnungen möglich ist. Beide Methoden, jeweils als Vertreter von Operatoren auf Basis der FFT und in Integralform, sind zur Berechnung geeignet. Die Bilder für die Fresnel-Näherung wirken etwas schärfer als für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral. Der Grund ist der größere verwendete Strahlradius der 1. Variante. Die genaue Begründung ist unter **3.5.1** zu finden. Weiterhin wird deutlich, dass die höheren Unterordnungen um den Faktor des Betrages ihrer Ordnung in  $x$ - und  $y$ -Richtung größer sind als die 1. Unterordnung. Eine Erklärung dafür konnte bisher nicht gefunden werden. Eine Größenänderung kann nach **(3-13)** nur über eine Änderung der Pixelgröße erfolgen, da alle anderen Größen konstant sind. Eine Verdopplung der Größe einer Unterordnung würde eine Halbierung der Pixelgröße bedeuten, was aufgrund der vorgegebenen räumlichen Diskretisierung nicht möglich ist. Eine Verdopplung der Pixelgröße wäre hingegen möglich. Da die sichtbaren höheren Unterordnungen negative Unterordnungen repräsentieren, sind sie umgekehrt und seitenvertauscht.

Zusammen mit der Größenänderung und den berechneten Effizienzen aus **Abb. 3-16** kann die schwache Sichtbarkeit der Unterordnungen erklärt werden. Sie besitzen nur einen geringen Leistungsanteil und da sich ihre Fläche um das Quadrat von  $o$  erhöht, resultiert daraus eine niedrigere Feldstärke. Die -3. Unterordnung besitzt nur eine geringfügig höhere Feldstärke als das Hintergrundrauschen.

Aufgrund der Ergebnisse der Untersuchungen lässt sich die Beugungseffizienz zusammengefasst durch:

$$\eta_o^p = \begin{cases} \text{sinc}^2\left(\frac{1}{p}\right) & \text{für } o = 1 \\ \left[ \frac{\sin(\pi(o - \kappa))}{\sin\left(\frac{\pi(o - \kappa)}{p}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{o \cdot \pi}{p}\right)}{o \cdot \pi} \right]^2 & \text{für } o \neq 1 \end{cases} \quad (3-19)$$

*Beugungseffizienz einer Unterordnung o*

beschreiben. Sie kann als relativer Leistungsanteil einer Unterordnung  $o$  an der Gesamtleistung einer Beugungsordnung  $l$  interpretiert werden. Wie hoch die Leistung einer Ordnung  $l$  ist, hängt von der Sinc-Funktion ab, welche die Feldstärke moduliert. Diese Modulation wird im Unterkapitel 3.4.3 beschrieben.

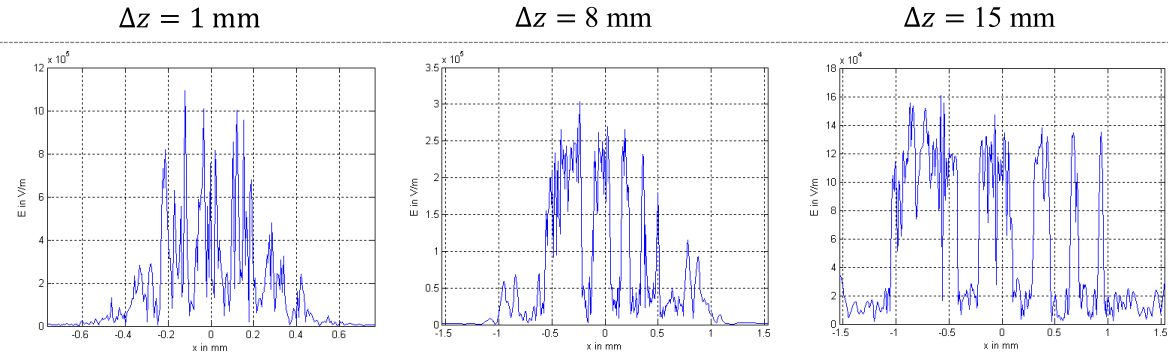
### Höhere Ordnungen

Bisher wurde nur die Sichtbarkeit und Ausprägung der Unterordnungen thematisiert. Daher werden im Weiteren die höheren Ordnungen fokussiert betrachtet

Zunächst soll das Erscheinungsbild der berechneten Abbildung für kurze Entfernungen untersucht werden. Ein DOE mit einem Strahlradius von  $w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$  und einer Pixelgröße von  $6 \mu\text{m}$  wird berechnet und der Querschnitt des Beugungsbildes in verschiedenen Entfernungen gebildet. Die weiteren Parameter der Simulation werden aus **Tab. 3-5** übernommen. Als Brennweite des Linsenterms wird in jeder nachfolgenden Abbildung die Entfernung  $\Delta z$  verwendet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-18** zu finden.

**Tab. 3-5** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Größe des Beugungsbildes in verschiedenen Entfernungen und für drei verschiedenen Strahlradien sowie des Erscheinungsbildes in kurzen Entfernungen

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 100 - 1000 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 100 - 1000 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^7 - 2^{10}$	$2^8 - 2^{11}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$1 - 65 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-18** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Querschnitt (entlang der  $x$ -Achse) für verschiedene Entfernungen, links:  $N_x = 2^8$ , rechts und Mitte:  $N_x = 2^9$ ;  $N_{x,DOE} = 2^8$

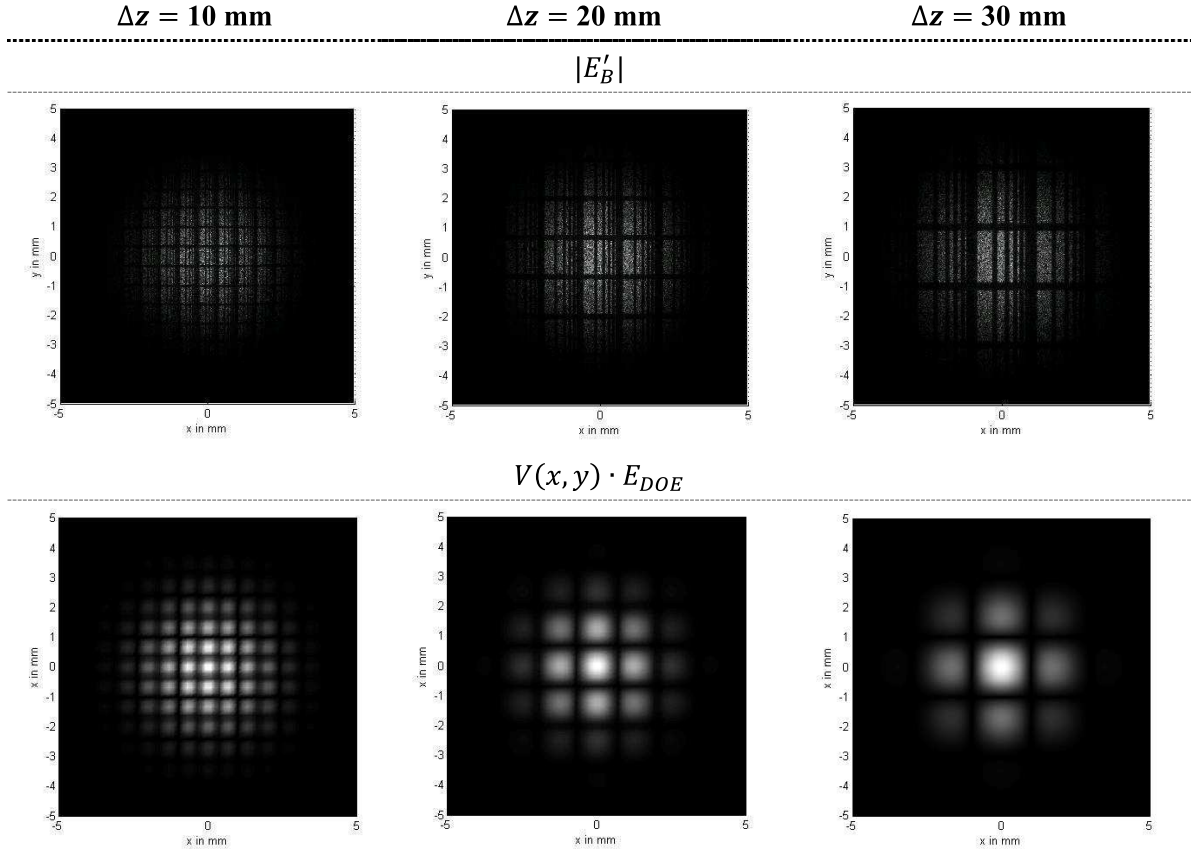
Die Darstellungen in **Abb. 3-18** zeigen deutlich, dass das Beugungsbild in geringen Entfernungen  $\Delta z$  mit der Feldstärke des Ausgangsstrahlprofils moduliert. Im verwendeten Beispiel ist das Ausgangsstrahlprofil ein Gaußstrahl. Eine Modulation ist auch für höhere Moden erkennbar. Auf eine separate Darstellung wird verzichtet. Die Modulation ist nur erkennbar solange die 0. Ordnung kleiner als das Ausgangsstrahlprofil ist.

Neben der Modulation mit dem Ausgangsstrahlprofil existiert noch der bereits beschriebene prinzipielle räumliche Verlauf der Ordnungen nach (3-12). Um die Gesamtmodulation ( $V(x, y) \cdot E_{DOE}$ ) und die Sichtbarkeit höherer Ordnungen zu verdeutlichen, werden weitere Untersuchungen zu dieser Thematik durchgeführt. Als Strahlradius wird  $w_{0,\sigma} = 2$  mm und eine Pixelgröße von  $\Delta x_{DOE} = 15$   $\mu$ m gewählt. Für die Berechnung der Phasenlage werden  $N_{x,DOE} = 2^{11}$  Elemente verwendet. Die restlichen Parameter werden aus **Tab. 3-5** übernommen. Berechnet werden die Beugungsbilder für drei verschiedene Entfernungen sowie die Gesamtmodulation. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-19** dargestellt.

**Abb. 3-19** zeigt deutlich, dass die Abschätzung der Lage der Ordnungen moduliert mit dem Ausgangsstrahlenprofil  $E_{DOE}$  sehr gut möglich ist. Mit zunehmender Entfernung sind weniger Ordnungen im Beugungsbild sichtbar. Der Grund ist, dass sie sich nach (3-8) bzw. ihre Abgrenzung nach (3-10) ausbreiten. Ihre Größe nimmt linear mit der Entfernung  $\Delta z$  zu. Wird die Abbildung in einer kurzen Entfernung realisiert, d. h. ein Fresnel-Element liegt vor, werden alle Ordnungen  $l$  sichtbar für die gilt:

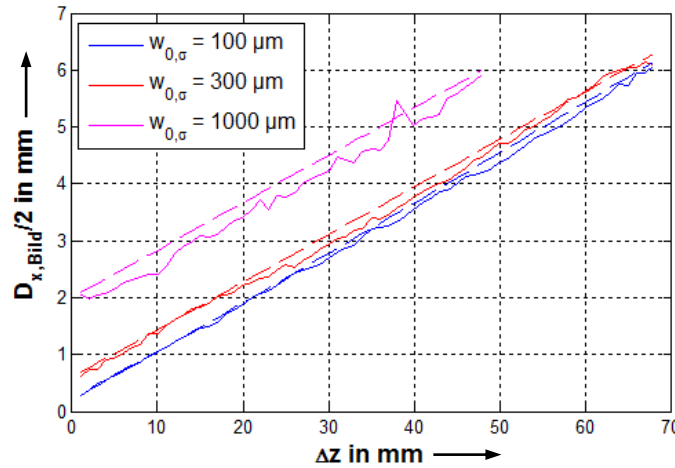
*Vollständige Sichtbarkeit einer Ordnung  $l = m$  im Beugungsbild eines Operators auf Basis der Fast Fourier-Transformation bei einfacher Abtastung*

$$x_{Min}(m) \leq \frac{D_{x,Bild}}{2} \quad (3-20)$$



**Abb. 3-19** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder in verschiedenen Entfernungen;  $N_x = 2^{10}$

Daher stellt sich an dieser Stelle die Frage, wie groß  $D_{x,Bild}/2$  ist. Zur Beantwortung wird das Beugungsbild in verschiedenen Entfernungen für drei verschiedene Strahlradian berechnet. Von den berechneten Beugungsbildern wird ein Schnitt entlang der  $x$ -Achse gebildet. Anschließend wird diejenige  $x$ -Koordinate, bei der 1 % des Maximums des Schnittes das erste Mal überschritten wird, ermittelt. Der absolute Betrag der bestimmten Koordinate wird als halbe Bildgröße  $D_{x,Bild}/2$  angenommen. Aufgrund der statistischen Schwankungen wird die Größe  $D_{x,Bild}/2$  aus fünf Simulationen als arithmetisches Mittel bestimmt. Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 3-5** verwendet. Für die verschiedenen Strahlradian wird nach **(2-8)** eine Elementanzahl  $N_{x,DOE}$  gewählt, sodass keine Beschneidung des Ausgangsstrahlprofils stattfindet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-20** dargestellt.



**Abb. 3-20** Darstellung der ermittelten halben Ausdehnungen  $D_{x,Bild} / 2$  für verschiedene Strahlradien (durchgezogene Linien) und als Vergleich die halbe Ausdehnung des gesamten Beugungsbildes nach (3-23) (gestrichelt);  $N_x = 2^{11}$

Die Untersuchungen ergeben, dass sich die Größe  $D_{x,Bild}$  aus der Größe der 0. Beugungsordnung und dem Summanden  $2 \cdot w_{\sigma}(\Delta z)$  berechnet. Der Strahlradius in der Entfernung  $\Delta z$  ergibt sich aus [Loes2009]:

Strahlradius in der Entfernung  $\Delta z$

$$w_{\sigma}(\Delta z) = w_{0,\sigma} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta z}{z_{R,\sigma}} \right)^2} \quad (3-21)$$

Die Rayleigh-Länge  $z_{R,\sigma}$  auf Basis des 2. Moments wird bestimmt durch:

Rayleigh-Länge

$$z_{R,\sigma} = \frac{\pi \cdot w_{0,\sigma}^2}{M^2 \cdot \lambda_0} \quad (3-22)$$

Somit kann die Bildgröße nach der folgenden Form berechnet werden:

Größe des gesamten Beugungsbildes bei einfacher Abtastung für einen Operator auf Basis der Fast Fourier-Transformation

$$D_{x,Bild} = 2 \cdot x_{Min}(1) + 4 \cdot w_{\sigma}(\Delta z)$$

$$D_{x,Bild} \cong \frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} + 4 \cdot w_{0,\sigma} \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta z \cdot \lambda_0 \cdot M^2}{n_0 \cdot \pi \cdot w_{0,\sigma}^2} \right)^2} \quad (3-23)$$

Die letzte Berechnungsvorschrift gilt nur, wenn kleine Beugungswinkel vorliegen. Zum Vergleich ist dieser analytische Zusammenhang ebenfalls in **Abb. 3-20** veranschaulicht. Zusammen mit (3-10) kann abgeschätzt werden, ob eine Ordnung vollständig abgebildet wird:

Vollständige Sichtbarkeit einer Ordnung  $l = m$  im Beugungsbild eines Operators auf Basis der Fast Fourier-Transformation bei einfacher Abtastung

$$\Delta z \cdot \tan(\arcsin\left(\frac{(2 \cdot m + 1) \cdot \lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}\right)) \leq \Delta z \cdot \tan(\arcsin\left(\frac{\lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}\right)) + 2 \cdot w_\sigma(\Delta z)$$

Für kleine Winkel gilt:

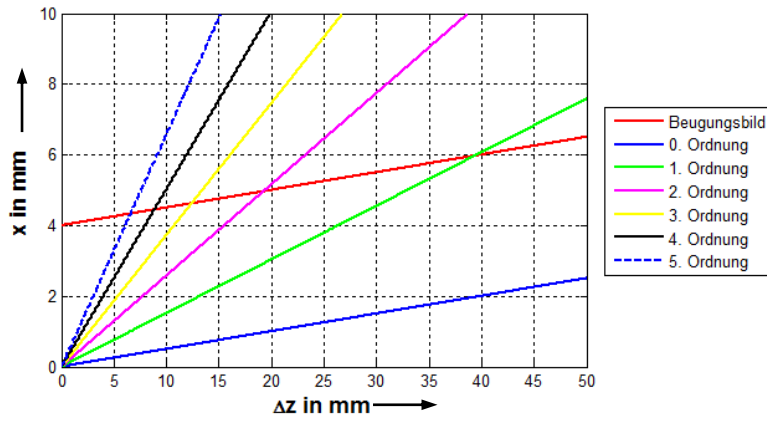
(3-24)

$$m \leq 2 \cdot \Delta x_{DOE} \cdot \sqrt{\left(\frac{w_{0,\sigma} \cdot n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{M^2}{\pi \cdot w_{0,\sigma}}\right)^2}$$

Entfernung

$$\Delta z \leq \frac{w_{0,\sigma} \cdot n_0}{\lambda_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{2 \cdot \Delta x_{DOE}}\right)^2 - \left(\frac{M^2}{\pi \cdot w_{0,\sigma}}\right)^2}^{-1} \quad (3-25)$$

Der letzte Ausdruck kann nur unter der Bedingung für kleine Beugungswinkel aufgestellt werden. Zur Verdeutlichung ist für das Beispiel aus **Abb. 3-19** die analytisch berechnete Abgrenzung der Ordnungen in **Abb. 3-21** dargestellt.

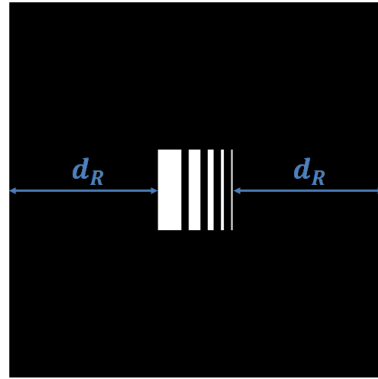


**Abb. 3-21** Darstellung der analytisch berechneten Position der Minima des Beispiels aus **Abb. 3-19** in Abhängigkeit von der Entfernung  $\Delta z$

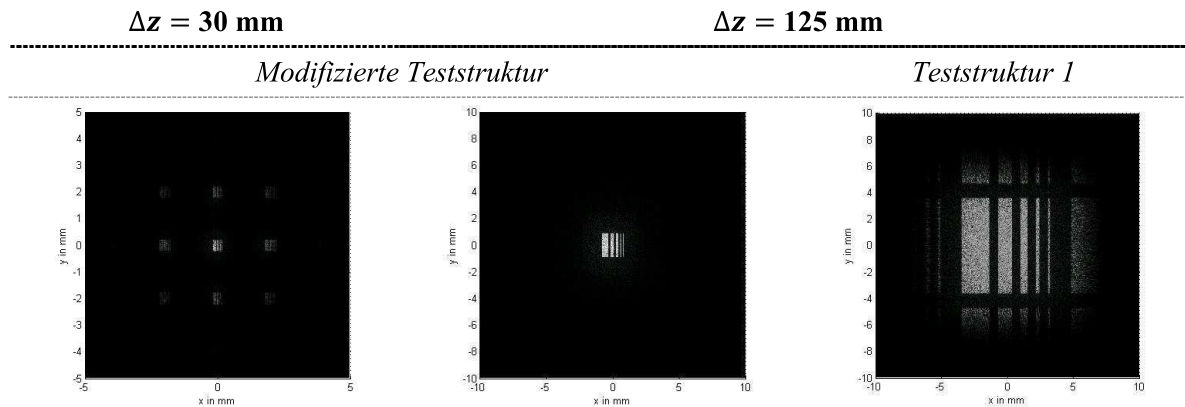
Anhand der Darstellungen in **Abb. 3-21** ist deutlich zu sehen, dass mit zunehmender Entfernung  $\Delta z$  immer weniger Ordnungen im Beugungsbild sichtbar werden. Wie viele Ordnungen sichtbar werden, kann mit Hilfe von Formel (3-24) abgeschätzt werden. In einer Entfernung von 10 mm müsste die 5. Ordnung noch zu sehen sein. Diese ist in **Abb. 3-19** nur schwach sichtbar aufgrund der Modulation mit dem Ausgangsstrahlprofil. Das Gleiche gilt für eine Entfernung von 20 mm für die 3. Ordnung und in einer Entfernung von 30 mm für die 2. Ordnung. Für noch größere Entfernungen würden auch noch die 2. und 1. Beugungsordnung verschwinden und in sehr großer Entfernung nach (3-25) nur noch die 0. Ordnung im Beugungsbild erscheinen (siehe 3.5.1).

Die Entfernung  $\Delta z$  in der nur noch die 0. Beugungsordnung sichtbar ist, kann durch eine Modifikation der Teststruktur herabgesetzt werden. Dazu muss der Abstand der Struktur zum

Bildrand vergrößert werden, was in **Abb. 3-22** dargestellt ist. Als Bezugsgröße dient das Maß  $d_R$ . Zum Vergleich werden die simulierten Beugungsbilder von Teststruktur 1 und der modifizierten Teststruktur in **Abb. 3-23** gegenüber gestellt. Das Beugungsbild der modifizierten Struktur wird für eine Entfernung von 30 mm berechnet und ebenfalls in der genannten Abbildung dargestellt.



**Abb. 3-22** Modifizierte Teststruktur mit erweitertem Rand



**Abb. 3-23** Gegenüberstellung der berechneten Beugungsbilder von Teststruktur 1 und ihrer Modifikation; links:  $N_x = 2^{10}$ ; Mitte und rechts:  $N_x = 2^{11}$ ;  $w_{0,\sigma} = 2 \text{ mm}$ ;  $\Delta x_{DOE} = 15 \mu\text{m}$

restliche Parameter aus **Tab. 3-5**

Die Beugungsbilder in **Abb. 3-23** zeigen, dass durch die Modifikation die 1. und -1. Beugungsordnung nicht mehr im Beugungsbild in einer Entfernung von 125 mm zu sehen ist. Tatsächlich haben die Ordnungen immer noch die gleiche Größe, da diese nur von den Parameter von Formel (3-13) abhängig ist. Weiterhin bewirkt ein erweiterter Rand, dass die Strukturen deutlich voneinander getrennt wirken. Der Nachteil ist die geringere Strukturgröße im Beugungsbild. Durch eine geringere Pixelgröße und damit höherer Divergenz kann dieser Nachteil ausgeglichen werden

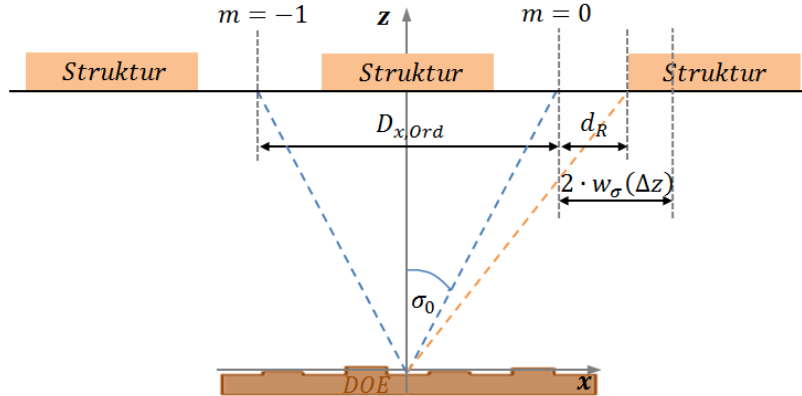
Wenn eine höhere Ordnung nicht im Beugungsbild eines Operators auf Basis der FFT sichtbar werden soll, muss sich die Struktur in einem hinreichend großen Abstand  $d_R$  vom



Bildrand befinden. Für die Sichtbarkeit der Struktur bzw. Teilstruktur einer höheren Ordnung bei einfacher Abtastung gilt somit:

$$x_{Min} \left( \sigma = \left( \sigma_{m-1} + \sigma_{m=0} \cdot \frac{2 \cdot d_R}{D_{x,Ord}} \right) \right) - x_{Min}(\sigma_{m=0}) \leq 2 \cdot w_\sigma(\Delta z) \quad (3-26)$$

Zur Verdeutlichung wurden die verwendeten Größen in der nachfolgenden Abbildung schematisch veranschaulicht.



**Abb. 3-24** Schematische Darstellung der verwendeten Größen zu Bestimmung der Bedingung ob die Struktur einer höheren Ordnung im Beugungsbild bei einfacher Abtastung und Verwendung eines Operators auf Basis der FFT sichtbar ist

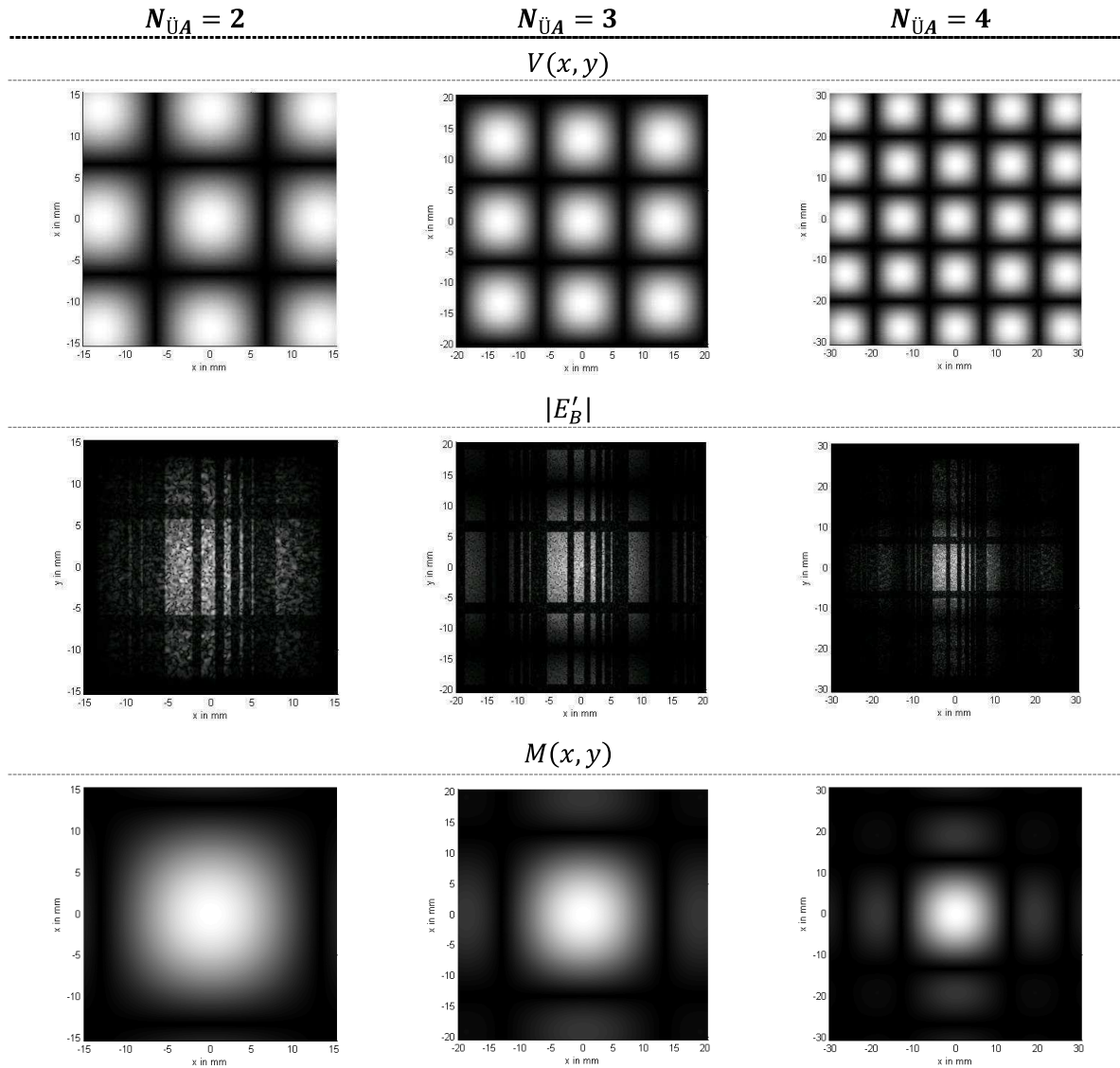
### 3.4.3 Überabtastung

Bei Überabtastung wird jedes Pixel in mehrere kleinere Elemente unterteilt. Die Zuordnung des Pixelwertes erfolgt über zweidimensionale Interpolation nach der Methode des nächsten Nachbarn, d. h. das zu interpolierende Element erhält den Wert des nächstgelegenen Ausgangspixels. Lineare- oder kubische Spline-Interpolation würden die Ergebnisse verfälschen, da nicht vorhandene Zwischenwerte durch diese Methoden auftreten können. Spline-Interpolation kann zusätzlich zu Überschwingungen führen. Die interpolierte Elementgröße hängt vom Grad der Überabtastung  $N_{ÜA}$  ab.

Elementgröße durch  
Überabtastung

$$\Delta x' = \frac{\Delta x_{DOE}}{N_{ÜA}} \quad (3-27)$$

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen der Überabtastung sind einige ausgewählte Beispiele in **Abb. 3-25** dargestellt. Weiterhin ist der räumliche Verlauf der Ordnungen nach (3-12) und der Verlauf der Modulation durch die Sinc-Funktion nach (3-15) in der Abbildung veranschaulicht. Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 3-6** verwendet.



**Abb. 3-25** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Überabtastungen  $N_{\ddot{U}A}$ ;  
 links:  $N_x = 2^{12}$ ; Mitte:  $N_x = 2^{13}$ ; rechts:  $N_x = 2^{14}$

**Tab. 3-6** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Überabtastung

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^7$	$2^{12} - 2^{14}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$15 \mu\text{m}$	$15/N_{\ddot{U}A} \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	200 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja

Diskretisierungsstufen  $p$ : 22

**Abb. 3-25** zeigt deutlich, dass sich durch Überabtastung die Bildgröße erhöht. Diese wird u. a. durch die neue Elementgröße  $\Delta x'$  nach (3-13) bestimmt. Durch Erhöhung der Überabtastung  $N_{\text{ÜA}}$  um Eins wird jeweils eine weitere Ordnung sichtbar. Eine Hälfte der Ordnung wird auf der linken und die andere Hälfte auf der rechten Seite sichtbar. Die Größe der 0. Ordnung bleibt unverändert.

Der Grund für die Größenzunahme ist, dass durch die geänderte Elementgröße der berechenbare Ausschnitt mittels Fourier-Transformation verändert wird. Die maximal darstellbaren Raumfrequenzen vergrößern sich. Da die Bildebene im Unendlichen bzw. bei Verwendung einer Sammellinse als Fourier-Ebene bezeichnet wird, kann diese Analogie angewandt werden. Der Sachverhalt kann wie folgt interpretiert werden: Die höheren Ordnungen sind eigentlich alle vorhanden, jedoch ist der darstellbare Bereich der Raumfrequenzen begrenzt. Durch eine Verringerung der Elementgröße erhöht sich der darstellbare Bereich und die höheren Ordnungen werden sichtbar.

Die Wiederholung der verschiedenen Ordnungen kann als Faltung interpretiert werden. Eine Faltung von zwei Funktionen  $f$  und  $g$  ist mathematisch über die Form [Wes2011]:

$$\text{Faltung} \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x') \cdot g(x') dx' \quad (3-28)$$

beschrieben. Die Faltung kann über das Faltungstheorem als Fourier-Transformation ausgeführt werden und ergibt eine Multiplikation der Fourier-Transformierten  $G = \mathcal{F}(g)$  und  $F = \mathcal{F}(f)$  der beiden Funktionen.

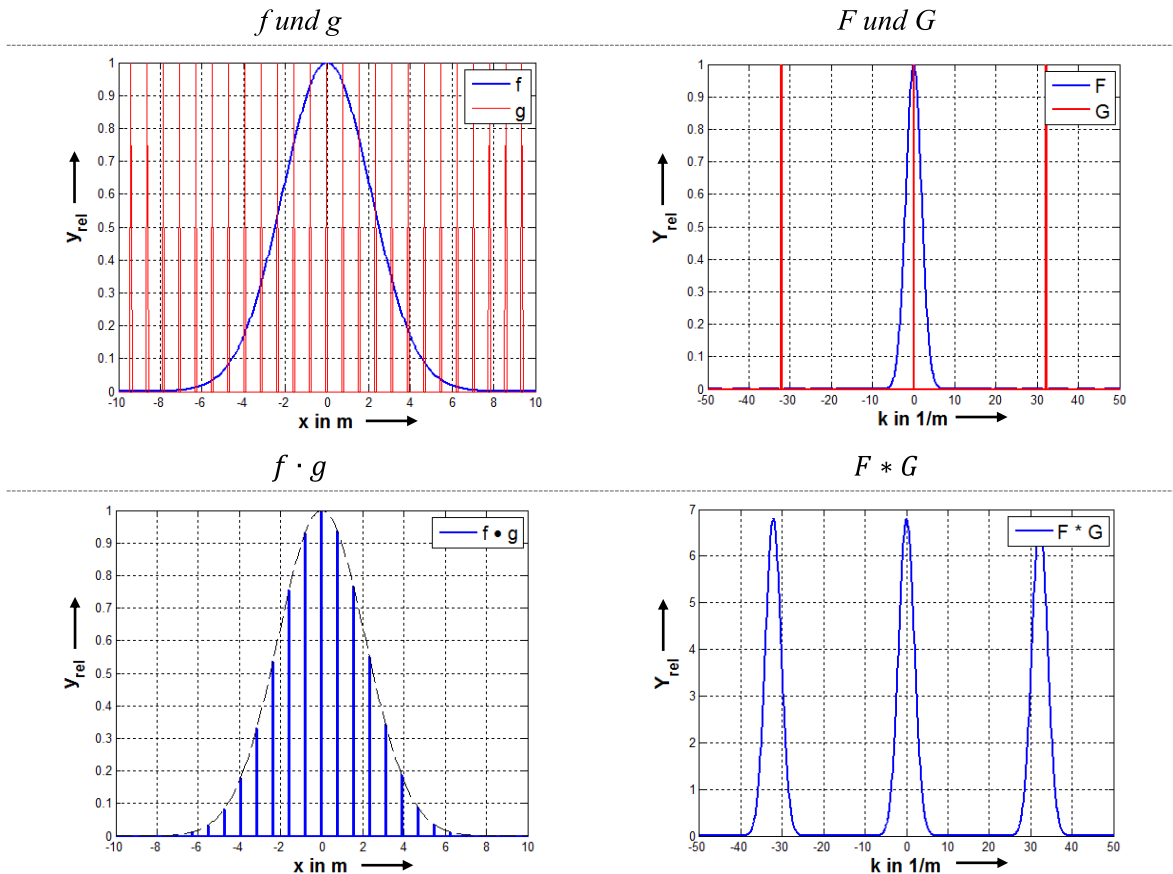
$$\text{Faltungstheorem} \quad \mathcal{F}(f * g) = F \cdot G \quad (3-29)$$

Der umgekehrte Fall ist ebenfalls möglich. Demnach kann eine Faltung in der Fourier-Ebene durch eine Multiplikation zweier Funktionen in der DOE-Ebene erzeugt werden. Die berechnete Phasenlage mit dem Ausgangsstrahlprofil  $E_{\text{DOE}} \cdot e^{i\varphi_{\text{DOE}}}$  entspricht der Funktion  $f$  und ihre Fourier-Transformierte  $F$  der 0. Beugungsordnung. Die Funktion  $g$  wird durch die verschiedenen Gitterpunkte bzw. Pixel dargestellt. Die Einteilung in diskrete Gitterpunkte bzw. die Abtastung in diskreten Abständen stellt eine Reihe von Delta-Distributionen  $\delta$  dar. Entscheidend sind nur die Pixel mit der Pixelgröße  $\Delta x_{\text{DOE}}$ . Interpolierte Elemente haben keinen Einfluss. Eine Multiplikation einer beliebigen Funktion  $f$  mit einer Reihe von Delta-Distributionen liefert immer den Funktionswert der Funktion  $f$  an den Stellen der Delta-Distributionen. Die Fourier-Transformierte  $G$  von  $g$  kann mit Hilfe von (3-11) durch Ersetzen des Faktors 2 mit  $N_{x,\text{DOE}}$  bestimmt werden:

Fourier-Transformierte  $G_x$  von  $g$ :

$$G_x(x, y) = \frac{\sin\left(N_{x,DOE} \cdot \pi \cdot \frac{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}{\lambda_0} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{\Delta z}\right)\right)\right)}{\sin\left(\pi \cdot \frac{n_0 \cdot \Delta x_{DOE}}{\lambda_0} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{x}{\Delta z}\right)\right)\right)} \quad (3-30)$$

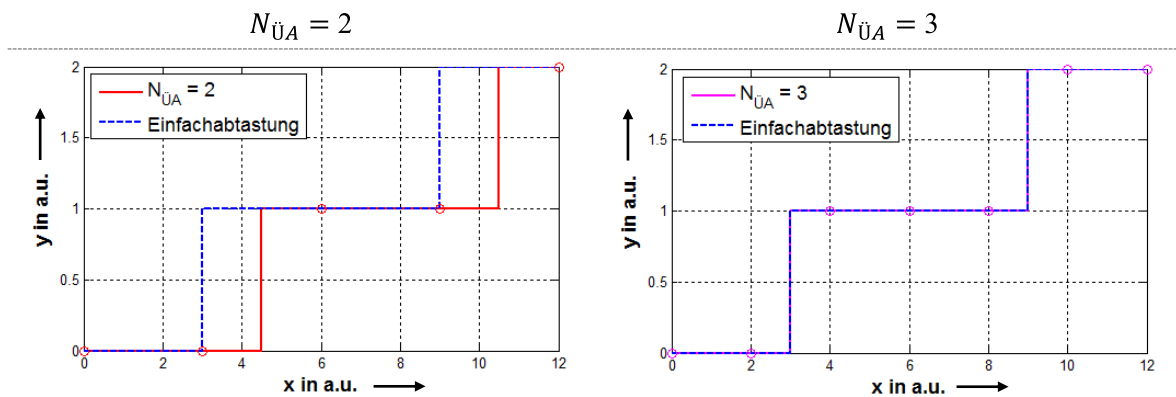
Für die  $y$ -Richtung gilt die analoge Beziehung und für  $G$  die Analogie zu (3-12). Für eine hinreichend große Anzahl  $N_{x,DOE}$  kann  $G$  durch eine Delta-Distribution approximiert werden. Die Multiplikation von  $E_{DOE} \cdot e^{i\varphi_{DOE}}$  mit den Delta-Distributionen der Gitterpunkte ergibt nach dem Faltungstheorem eine Faltung der Fourier-Transformierten Funktionen in der Fourier-Ebene. Die Faltung einer beliebigen Funktion mit einer Reihe von Delta-Distributionen ergibt eine Wiederholung der Funktion jeweils an den Orten der Delta-Distribution. Demnach wird die 0. Ordnung an den Stellen der approximierten Delta-Distributionen wiederholt. Anschaulich ist ein Beispiel dazu in **Abb. 3-26** dargestellt.



**Abb. 3-26** Darstellung der Multiplikation einer beliebigen Funktion  $f$  mit einer Reihe von Delta-Distributionen  $g$  sowie der Faltung der Fourier-Transformierten  $F$  und  $G$

**Abb. 3-25** zeigt, dass eine Abschätzung der Lage und Modulation der verschiedenen Ordnungen sehr gut mit Hilfe der analytischen Formeln  $V(x, y)$  und  $M(x, y)$  möglich ist. Die horizontalen und vertikalen Ordnungen sind durch die Modulation mit der Sinc-Funktion viel deutlicher ausgeprägt als die gemischten Ordnungen. Die Nullstellen der Sinc-Funktion befinden sich genau in der Mitte der Ordnungen, d. h. an den Positionen der Maxima der Beugungsordnungen (3-9).

Weiterhin ist in **Abb. 3-25** zu sehen, dass die Beugungsbilder für eine Ungerade Zahl an Überabtastung schärfer sind als für eine Gerade Zahl. Der Grund ist, dass für eine ungerade Anzahl die berechnete Position des Pixelwerts mit der interpolierten Position übereinstimmt. Für eine gerade Zahl stimmt diese Position nicht mehr überein. Zur Verdeutlichung wurde dieses Problem schematisch in **Abb. 3-27** abgebildet.

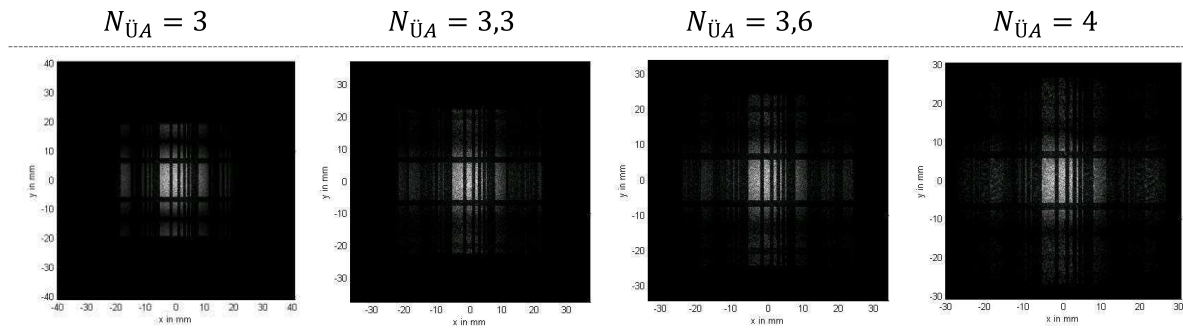


**Abb. 3-27** Darstellung der prinzipiellen Pixelgrößen und Lage der Pixel für verschiedene Überabtastungen

Die Darstellung in **Abb. 3-27** zeigt, dass bei zweifacher Abtastung die Pixel leicht nach rechts verschoben erscheinen. Jeweils die ersten und letzten Pixel haben außerdem eine andere Größe. Bei dreifacher Abtastung treten diese Effekte nicht auf.

In den gewählten Beispielen in **Abb. 3-25** ist die Überabtastung eine ganze Zahl. Daher sollen nachfolgend die Effekte aufgezeigt werden, wenn die Überabtastung keine ganze Zahl ist. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in **Abb. 3-28** zu finden. Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 3-6** übernommen. Die abweichenden Parameter sind in der Abbildung gekennzeichnet.

Anhand der Darstellungen in **Abb. 3-28** wird deutlich, dass die Nullstellen der Sinc-Funktion nicht so stark sichtbar sind, wie für eine gerade Anzahl an Überabtastung. Sie sind dennoch vorhanden. Die Ursache für die schwächere Sichtbarkeit ist, dass die Pixelgröße  $\Delta x_{\text{DOE}}$  aufgrund von Rundungen bei der Interpolation nicht mehr konstant ist und der bereits in **Abb. 3-27** dargestellte Effekt falls die Überabtastung keine ungerade Zahl ist. Weiterhin ist in der Abbildung besonders gut die Größenzunahme sichtbar.



**Abb. 3-28** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für eine ungerade Anzahl an Überabtastung;  $N_x = 2^{14}$

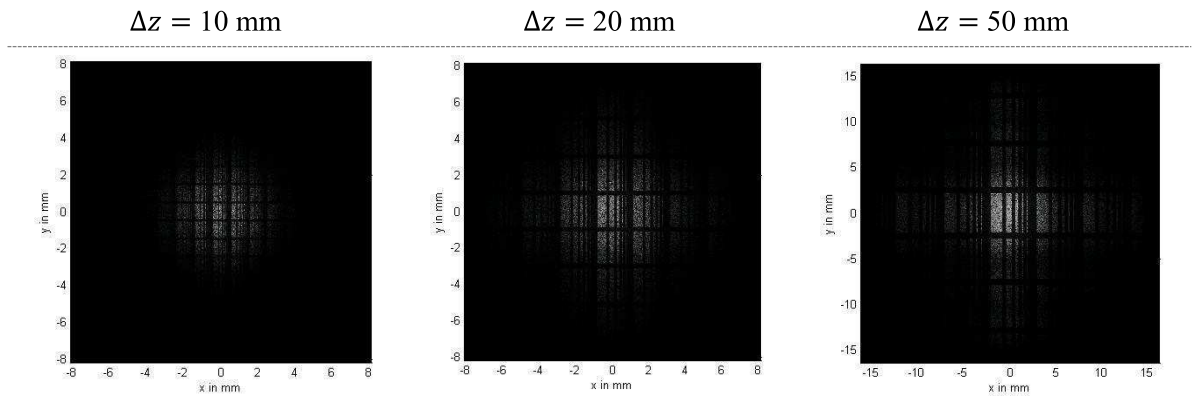
Die bisherigen Untersuchungen wurden für eine große Entfernung  $\Delta z$  durchgeführt. Bei Einfachabtastung werden im Nahfeld mehrere Ordnungen sichtbar. Der Effekt soll an dieser Stelle für Überabtastung näher betrachtet werden. Daher werden die Beugungsbilder mit einem großen Strahlradius von  $w_{0,\sigma} = 2 \text{ mm}$  für verschiedene Entfernungen berechnet. Die Überabtastung beträgt 5. Eine Übersicht der verwendeten Parameter ist in **Tab. 3-7** zusammengefasst. Die konkreten Parameter sind in der Abbildung ausgewiesen.

**Tab. 3-7** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Überabtastung im Nahfeld

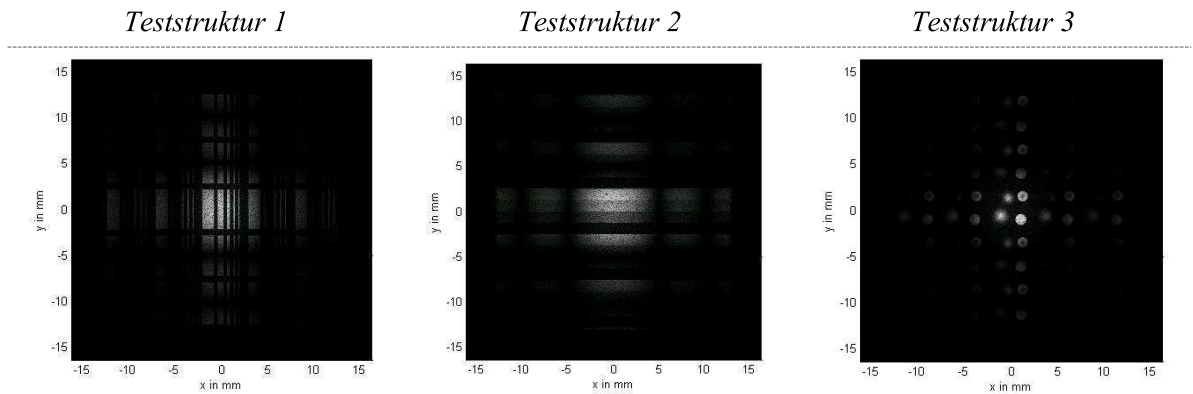
	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 - 2000 \text{ } \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 - 2000 \text{ } \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \text{ } \mu\text{m}$	$1 \text{ } \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8 - 2^{10}$	$2^{13} - 2^{14}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$10 \text{ } \mu\text{m}$	$2 \text{ } \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	10 - 50 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	

Bei der Betrachtung im Nahfeld (siehe **Abb. 3-29**) sind die gleichen Effekte wie bei Einfachabtastung sichtbar. Das bedeutet, die Auswirkungen der Überabtastung werden erst ab einer bestimmten Entfernung sichtbar. Außerhalb des Ausgangsstrahlprofils können nur diejenigen Ordnungen sichtbar werden, die sich im berechenbaren Bereich durch Überabtastung befinden. Innerhalb des Ausgangsstrahlprofils werden alle Ordnungen nach **(3-24)** sichtbar. Die Modulation mit der Sinc-Funktion wird erst sichtbar, wenn die Bildgröße durch Überabtastung

deutlich größer als das Ausgangsstrahlprofil ist. Sobald diese Bedingung erfüllt ist, wird die Modulation durch das Ausgangsstrahlprofil geringer. Die Nullstellen sind für eine Entfernung von 50 mm nicht deutlich zu sehen. Daher wird zum Vergleich noch ein weiteres Beugungsbild, jedoch mit einem Strahlradius von  $w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$  berechnet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-30** zu finden. In der Darstellung sind noch die Beugungsbilder der anderen beiden Teststrukturen veranschaulicht. Sie sind dargestellt um die Auswirkungen der Überabtastung auf verschiedene Beugungsstrukturen zu zeigen. Die Parameter zur Berechnung werden aus **Tab. 3-7** übernommen



**Abb. 3-29** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nahfeld für drei verschiedene Entfernungen;  $w_{0,\sigma} = 2 \text{ mm}$ ; links und Mitte:  $N_x = 2^{13}$ ; rechts:  $N_x = 2^{14}$ ;  $N_{x,DOE} = 2^{10}$  restliche Parameter aus **Tab. 3-7**



**Abb. 3-30** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Teststrukturen;  $\Delta z = 50 \text{ mm}$ ;  $w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$ ;  $N_x = 2^{14}$  restliche Parameter aus **Tab. 3-7**

In **Abb. 3-29** ist für eine Entfernung von 50 mm am rechten Rand noch ein Teil der 3. Ordnung zu sehen. Am oberen und unteren Ende sind die 3. und -3. Ordnung ebenfalls sichtbar, in **Abb. 3-30** jedoch nicht. Die Ursache ist, dass auch bei Überabtastung das Beugungsbild um den Summanden  $4 \cdot w_{\sigma}(\Delta z)$  vergrößert ist. Die Bildgröße kann anhand der gewonnenen Erkenntnisse wie folgt berechnet werden:



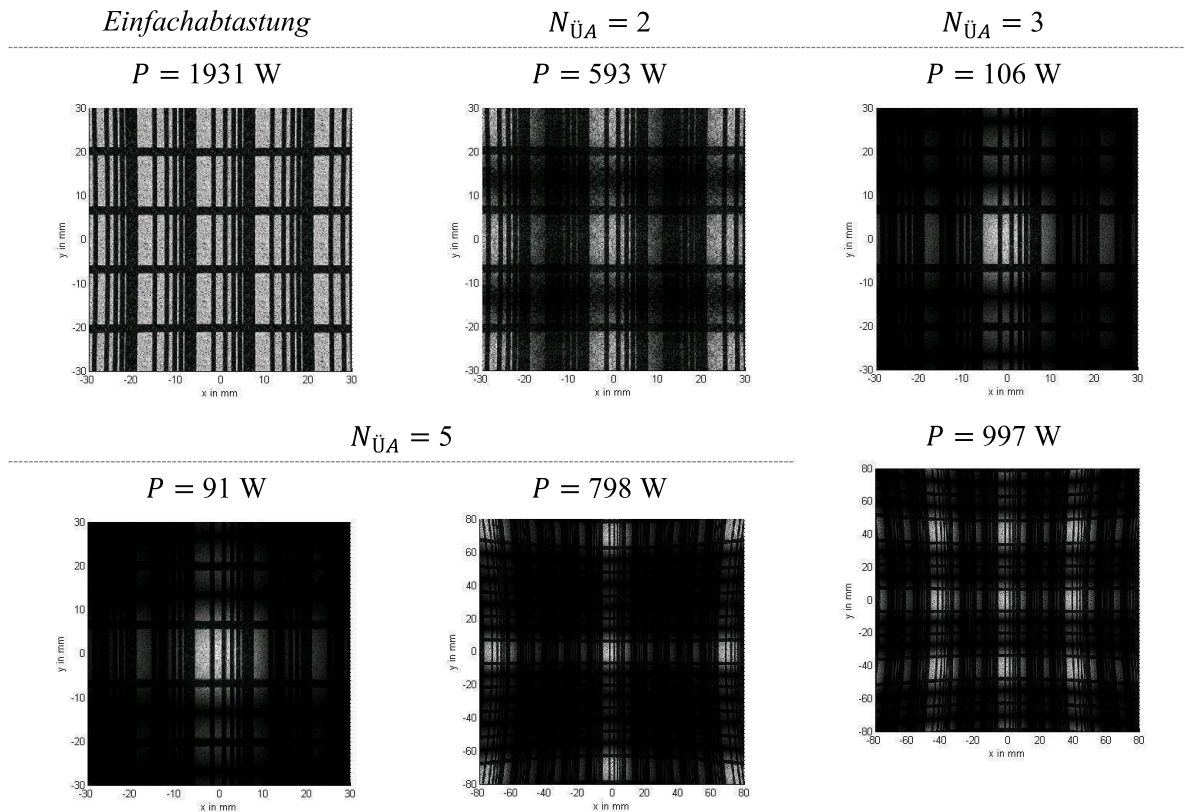
Bildgröße mit  
Überabtastung

$$D_{x,Bild} = 2 \cdot x_{Min}(N_{\ddot{U}A} \cdot \sigma_0) + 4 \cdot w_{\sigma}(\Delta z) \quad (3-31)$$

Die Darstellung für Teststruktur 1 ist in **Abb. 3-30** schärfer als in **Abb. 3-29** für eine Entfernung von 50 mm. Die Ursache ist die noch vorhandene Modulation mit dem Ausgangsstrahlprofil in **Abb. 3-29**. Für Teststruktur 2 ist in **Abb. 3-30** keine Unterscheidung der Ordnungen möglich. Der Effekt kann durch den fehlenden Abstand der Struktur zum Bildrand ( $d_R = 0$ ) erklärt werden.

Für alle vorangegangenen Simulationen in diesem Unterkapitel wurde die Fresnel-Näherung im Spektralraum für die Berechnungen verwendet, d. h. ein Operator auf Basis der FFT. Daher sollen in den nachfolgenden Untersuchungen die Effekte für einen Operator in Integralform thematisiert werden.

Zur Veranschaulichung werden einige Beugungsbilder für verschiedene Anzahlen an Überabtastung mit den Parametern aus **Tab. 3-6** berechnet und in **Abb. 3-31** dargestellt. Die Elementgröße auf der Abbildungsebene beträgt  $15 \mu\text{m}$ . Die Elementanzahl  $2^9$ . Für  $N_{\ddot{U}A} = 3$  und  $N_{\ddot{U}A} = 5$  wird der Bereich zusätzlich auf 160 mm ausgedehnt.



**Abb. 3-31** Darstellung der berechneten Beugungsbilder für verschiedene Überabtastungen  $N_{\ddot{U}A}$  mit Hilfe des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral;  $P_0 = 93,75 \text{ W}$



**Abb. 3-31** zeigt deutlich, dass bei einem Operator in Integralform, im Gegensatz zu einem Operator auf Basis der FFT, alle Ordnungen bei Einfachabtastung sichtbar werden. Die Modulation mittels Sinc-Funktion tritt nur bei Überabtastung ein. Als Bezugsgröße, ob die berechneten Ordnungen tatsächlich vorhanden sind, wird die Leistung im berechneten Ausschnitt über:

$$\text{Numerische Leistungsberechnung} \quad P = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{Z_w} \cdot \sum_{u=1}^{N_x} \sum_{v=1}^{N_y} |E'_B|^2 \quad (3-32)$$

bestimmt.  $Z_w$  bezeichnet die Wellenimpedanz und beträgt in Luft etwa  $377 \, \Omega$ . Die berechnete Leistung ist ebenfalls in der Darstellung ausgewiesen.

Anhand der Ähnlichkeit der Darstellungen in **Abb. 3-31** und **Abb. 3-30** (links) bzw. **Abb. 3-28** (links) kann der modulierte Bereich dem mittels FFT berechneten Bereich gleichgesetzt werden. Er wiederholt sich periodisch. Dies kann als Faltung zwischen den entstehenden Delta-Distributionen und dem modulierten Bereich gedeutet werden. Die Delta-Distributionen entstehen nach (3-30), jedoch muss statt der Pixelgröße  $\Delta x_{DOE}$  die Elementgröße  $\Delta x'$  verwendet werden.

Die Berechnung der Leistung zeigt, dass die wiederholten Bereiche in Wirklichkeit nicht vorhanden sind und Artefakte des Propagationsoperators darstellen. Nur die modulierten Bereiche sind reell vorhanden, was durch die Leistungsbestimmung bei fünffacher Überabtastung und einem Bereich von  $D_x = D_y = 60 \, \text{mm}$  deutlich wird. Der modulierte Bereich enthält immer die komplette Eingangsleistung  $P_0$  unabhängig von der Zahl an Überabtastung. In der Darstellung ist dieser leicht beschnitten, wodurch die berechnete Leistung geringfügig kleiner ist. Der gleiche Effekt tritt auch bei einem Operator auf Basis der FFT auf. Für eine korrekte Berechnung der auftretenden Intensitäten wäre eine unendlich bzw. hinreichend hohe Überabtastung notwendig. Dies ist aufgrund der begrenzten Rechenkapazitäten und den erheblich höheren Rechenaufwand nicht bzw. nur schwer möglich. Somit bleibt die Berechnung relativer Werte als einzige Alternative.

In der Realität wird ein Pixel theoretisch unendlich oft abgetastet. Dadurch kann jede höhere Beugungsordnung entstehen. Eine sehr hohe Überabtastung erzeugt bei Operatoren in Integralform und auf Basis der FFT identische Ergebnisse. Der modulierte, korrekt berechnete Bereich würde die komplette Abbildungsebene abdecken. Alle höheren Ordnungen werden dennoch nicht sichtbar, da die Intensität mit zunehmender Ordnung nach der beschriebenen Sinc-Funktion abnimmt und auch ab einer bestimmten Ordnung der theoretische Grenzwinkel von  $\sigma_m = 90^\circ$  erreicht ist. Für große Beugungswinkel findet eine Verzerrung des berechneten Beugungsbildes statt, was bereits in **Abb. 3-31** für die Ausdehnungen  $D_x = D_y = 160 \, \text{mm}$  zu sehen ist.

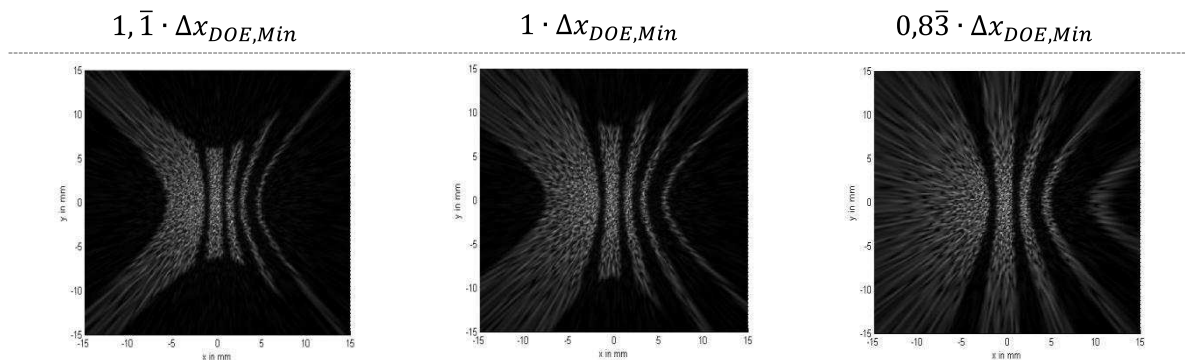
Anhand von (3-9) wird ersichtlich, dass eine Mindestpixelgröße für den Fall  $\sigma_0 = 90^\circ$  existiert, d. h. nur die 0. Beugungsordnung ist sichtbar.

$$\text{Mindestpixelgröße} \quad \Delta x_{DOE,Min} = \frac{\lambda_0}{2 \cdot n_0} \quad (3-33)$$

Zur Verdeutlichung sind einige ausgewählten Beispiele in **Abb. 3-32** dargestellt. Für die Berechnung werden die Parameter aus **Tab. 3-8** verwendet.

**Tab. 3-8** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Pixelgröße als Vielfaches der Mindestpixelgröße

	DOE-Berechnung	Abbildung
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel-Kirchhoff
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 250 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 250 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	9 – 12 $\mu\text{m}$	9 – 12 $\mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^8$
Elementgröße $\Delta x$ :	5 $\mu\text{m}$	5 $\mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	5 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-32** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Pixelgrößen als Vielfaches der Mindestpixelgröße; links:  $\lambda_0 = 9 \mu\text{m}$ ; Mitte:  $\lambda_0 = 10 \mu\text{m}$ ; rechts:  $\lambda_0 = 12 \mu\text{m}$

Anhand der Darstellung in **Abb. 3-32** und **Abb. 3-31** wird deutlich, dass die äußeren Bereiche des Beugungsbildes verzerrt erscheinen. Der Grund ist, dass diese Bereiche einen Winkel nahe  $90^\circ$  aufweisen. Die Lage eines Bildpunktes, der einem bestimmten Winkel zugeordnet ist, wird nach (3-6) durch die Tangens-Funktion bestimmt. Für sie gilt:  $\lim_{\sigma \rightarrow 90^\circ} \tan \sigma = \infty$ . Bereiche, die zu einem kleineren Winkel gehören, werden nicht so stark verzerrt. Eine korrekte Abbildung der inneren Bereiche des Bildes ist auch für eine Pixelgröße

kleiner als die Mindestpixelgröße möglich. Für höhere Ordnungen ergibt sich entsprechend (3-9) eine größere Mindestpixelgröße als für die 0. Beugungsordnung.

Die Berechnungen für **Abb. 3-32** wurden mit Hilfe des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral durchgeführt. Die Fresnel-Näherung im Spektralraum liefert bei dieser Berechnung keine korrekten Ergebnisse. Sie gilt nur unter der Bedingung, dass die Entfernung  $\Delta z$  von Abstrahl- und Abbildungsfläche groß gegenüber den Ausdehnungen auf den Flächen ist. Dies ist im gewählten Beispiel nicht erfüllt. Das Winkelspektrum würde korrekte Ergebnisse liefern. Jedoch muss der Umklappprozess (vgl. [Olb2012]) außerhalb des Betrachtungsbereichs befindlicher Strahlanteile beachtet werden, wodurch die äußeren Bereiche leicht verfälscht werden.

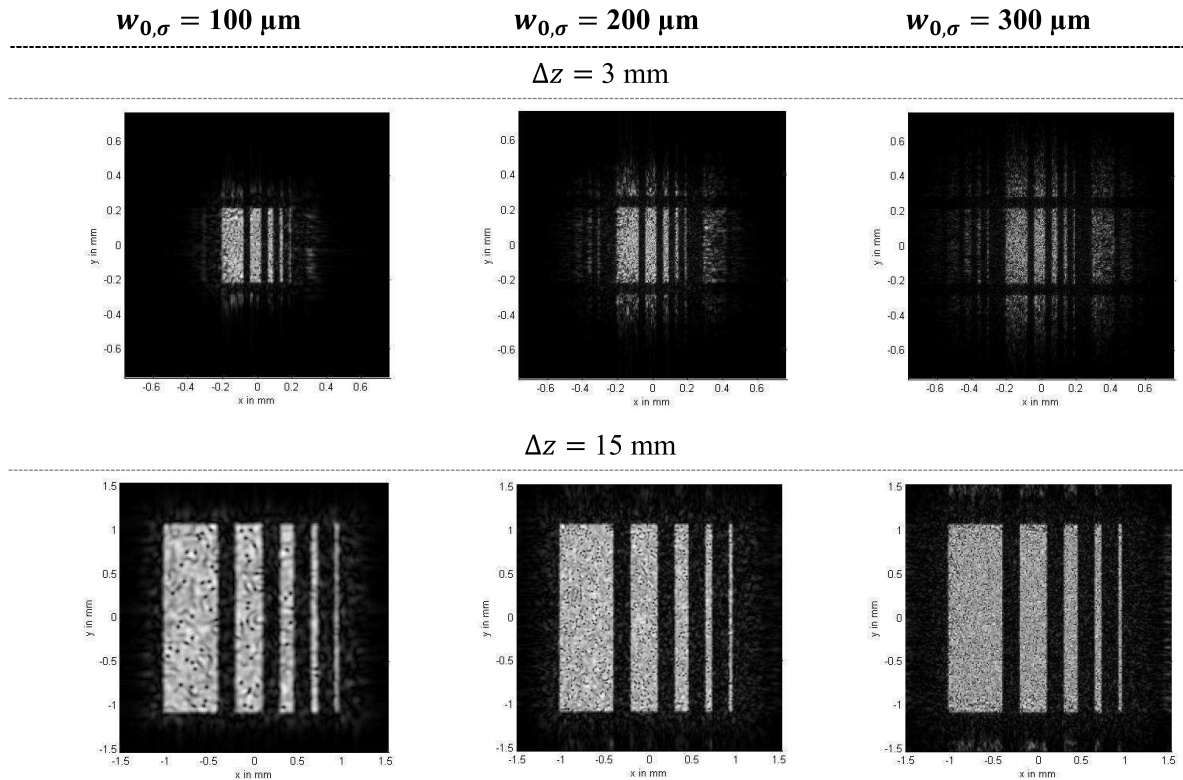
### 3.5 Variation der Strahlquelle

#### 3.5.1 Variation des Strahlradius

Zunächst soll der Einfluss der Verwendung unterschiedlich großer Strahlradien auf die erhaltenen Beugungsbilder untersucht werden. Die Strahlquelle ist für jede nachfolgende Berechnung ein Gaußstrahl mit ebener Phasenlage. Der Strahlradius, welcher zur Berechnung des DOEs zur Anwendung kommt, wird auch zur Berechnung der Abbildung genutzt. Eine Übersicht der verwendeten Parameter ist in **Tab. 3-9** zu finden. Die genauen Parameter einer Abbildung sind in dieser selbst oder im Untertitel gekennzeichnet. Einige ausgewählte Beugungsbilder sind zur Veranschaulichung der Auswirkungen von unterschiedlichen Strahlradien in **Abb. 3-33** dargestellt.

**Tab. 3-9** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes vom verwendeten Strahlradius

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 100 - 1000 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 100 - 1000 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^8 - 2^{11}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$1 - 70 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



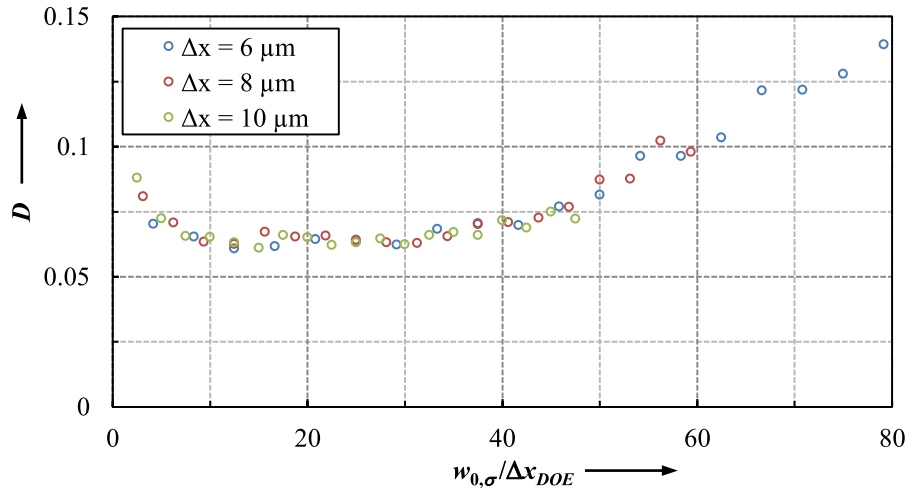
**Abb. 3-33** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Strahlradien und Entfernungen, oben:  $N_x = 2^8$ , unten:  $N_x = 2^9$

Anhand der Darstellung in **Abb. 3-33** sind drei Eigenschaften der erhaltenen Beugungsbilder ableitbar. Zum einen ist das gesamte sichtbare Beugungsbild im Nahfeld für einen größeren Strahlradius in der DOE-Ebene größer als für einen kleinen Strahlradius und mehrere Beugungsordnungen sind sichtbar. Zum anderen ist ab einer bestimmten Entfernung nur noch die 0. Beugungsordnung sichtbar und für einen größeren Strahlradius sind die erhaltenen Beugungsbilder detailreicher.

Die erste und zweite Eigenschaft ist bereits unter **3.4.2** hinreichend beschrieben. Die dritte Eigenschaft kann durch eine höhere Anzahl an Elemente erklärt werden, die zur Bildentstehung beitragen. Dieses Verhalten steht in Analogie zur Fourier-Transformation. Eine Erhöhung der beteiligten Elemente in der DOE-Ebene bewirkt eine bessere Auflösung in der Bildebene, die die Fourier-Ebene darstellt (vgl. **Abb. 3-5**).

Im Weiteren wird überprüft welche Pixelgröße bei einem bestimmten Strahlradius für eine detailreiche Abbildung notwendig ist. Dafür wird von Teststruktur 1 das Beugungsbild mit verschiedenen Strahlradien berechnet und die Summe der quadratischen Abweichungen nach (3-2) zwischen Beugungsbild  $E'_B$  und gewünschtem Bild  $E_B$  gebildet. Zur Verringerung des statistischen Rauschens durch die zufällige Anfangsphasenwahl werden die Summen der quadratischen Abweichungen durch drei Messungen arithmetisch gemittelt. Für die Berechnungen werden von den Parametern aus **Tab. 3-9** der Strahlradius von 25 bis 500  $\mu\text{m}$  und die

Elementgröße von 6 bis 10  $\mu\text{m}$  variiert. Die Entfernung wird nach (3-10) so angepasst, dass die 0. Beugungsordnung den Bildbereich komplett ausfüllt. Die Ergebnisse sind in Abb. 3-34 in Abhängigkeit des Verhältnisses von Strahlradius in der DOE-Ebene zu Pixelgröße aufgetragen.



**Abb. 3-34** Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit des Verhältnisses von Strahlradius in der DOE-Ebene zu Pixelgröße für Teststruktur 1

Abb. 3-34 zeigt, dass sich die Verläufe für die drei gewählten Pixelgrößen gleichen. Demnach kann das Verhältnis von Strahlradius in der DOE-Ebene zu Pixelgröße als Bezugsgröße verwendet werden. Der Verlauf weist ein Minimum auf. Das bedeutet jedoch nicht, dass das zum Minimum gehörende Verhältnis auch die beste Abbildung erzeugt.

Die erhöhten quadratischen Abweichungen sind für ein kleines Verhältnis von  $w_{0,\sigma}$  zu  $\Delta x_{DOE}$  mit der Unschärfe der Abbildung zu begründen. Die Bilder zeichnen sich durch verwaschene Kanten und einem geringen Kontrast (hier: Verhältnis von mittlere Feldstärke der Bereiche mit hoher Feldstärke zur mittleren Feldstärke des Hintergrunds) aus. Die Bilder wirken homogen und Speckle-Muster kommen nicht so stark zur Geltung (vgl. Abb. 3-33 links). Je größer das genannte Verhältnis wird, desto mehr erhöht sich der Kontrast und die Speckle-Muster dominieren. Die Intensitätsschwankungen in den Speckle-Mustern ergeben größere quadratische Abweichungen als homogenere Beugungsbilder. Die Bilder sehen optisch aufgrund des verbesserten Kontrastes und der besser ausgeprägten Kantensteilheit viel besser aus. Demnach ist stets ein möglichst großes Verhältnis von Strahlradius zu Pixelgröße anzustreben. Dies ist bei vorgegebenem Strahlradius nur durch eine Verringerung der Pixelgröße möglich. Dabei ist die Mindestpixelgröße nach (3-33) zu beachten.

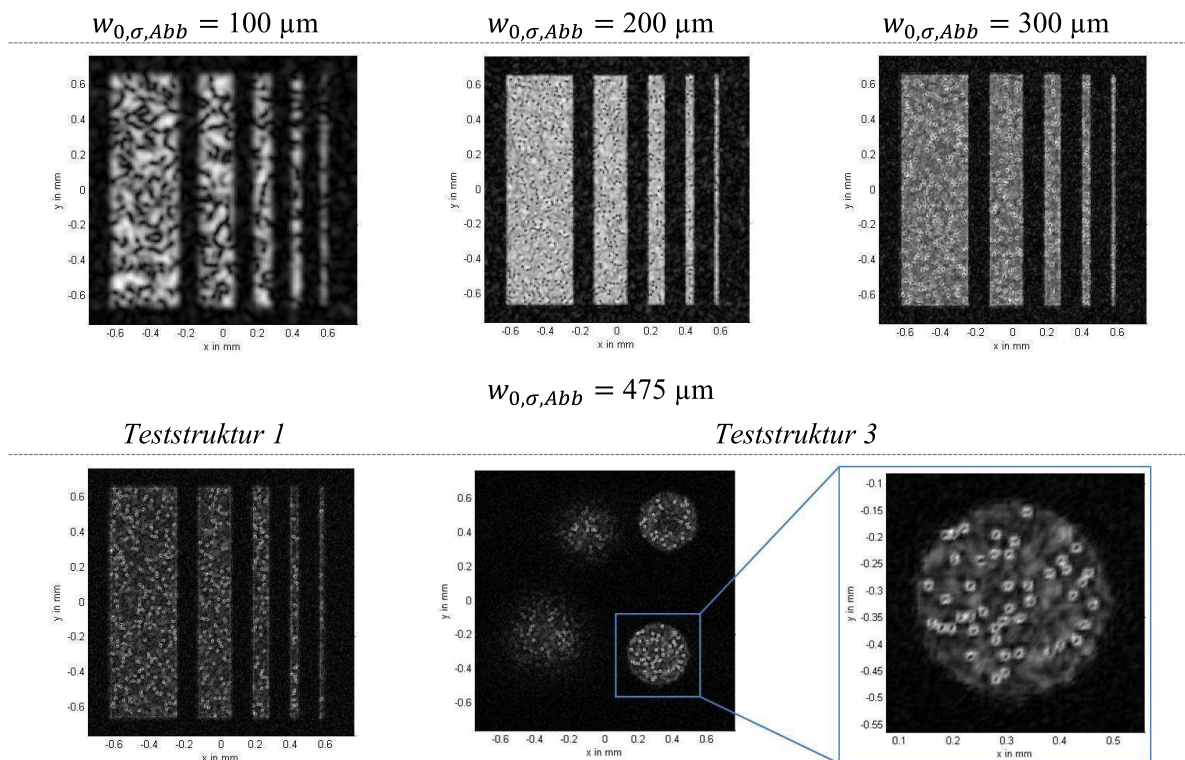
Die Summe der quadratischen Abweichungen ist in diesem Fall kein günstiges Maß um die Qualität der Abbildung zu beurteilen. Eine Bewertung der Kantensteilheit oder Homogenität der Strukturen wäre an dieser Stelle besser geeignet.

### 3.5.2 Abweichung des Strahlradius

In diesem Unterkapitel soll der Einfluss eines abweichenden Strahlradius zu dem, für welchen das DOE berechnet wird, geklärt werden. Für die Untersuchungen und Darstellungen wird die Phasenlage zunächst mit einem Strahlradius von  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$  berechnet und anschließend die Abbildung mit einem anderen Radius  $w_{0,\sigma,Abb}$ . Die Parameter der Simulationen werden aus **Tab. 3-10** verwendet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-35** dargestellt.

**Tab. 3-10** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes bei Verwendung eines abweichenden Strahlradius

	DOE-Berechnung	Abbildung
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 - 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 25 - 745 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^8$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$9,18 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-35** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Strahlradien; Phasenverteilung berechnet für:  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$ ; restliche Parameter aus **Tab. 3-10**

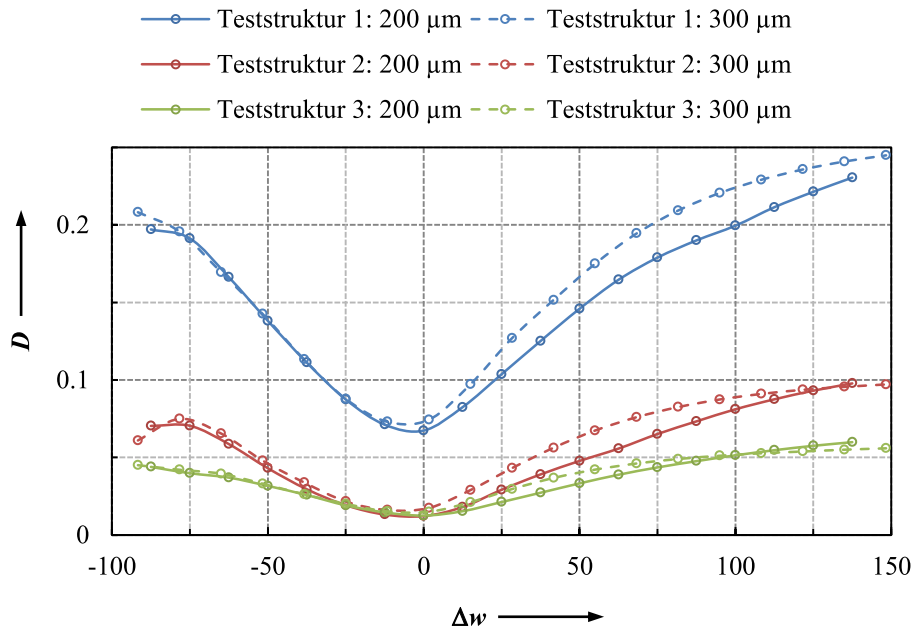
Die Verwendung eines anderen Strahlradius zur Berechnung der Abbildung, als den zur Berechnung der Phasenlage mittels IFTA genutzten, bewirkt zwei Effekte. Zum einen werden die Abbildungen für einen kleineren Strahlradius unschärfer und für einen größeren Radius schärfer, jedoch im Gesamtbild schlechter (siehe **Abb. 3-35** oben). Zum anderen bilden sich bei einem größeren Radius kleine Kreise mit höherer Intensität im Beugungsbild (siehe **Abb. 3-35** unten). Die Ursache dieser Kreise konnte bisher nicht geklärt werden. Sie sorgen für eine Verschlechterung des Beugungsbildes.

Aufgrund der sich ergebenden sichtbaren Verschlechterungen werden weitere Untersuchungen zur Verifizierung der Ergebnisse durchgeführt. Daher werden für Strahlradien von  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$  und  $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$  die benötigten Phasenlagen berechnet und anschließend mit einem anderen Strahlradius die Beugungsbilder. Zwischen den erhaltenen Beugungsbildern  $|E'_B|$  und der gewünschten Bildverteilung  $E_B$  wird die Summe der quadratischen Abweichungen nach (3-2) bestimmt. Diese wird in Abhängigkeit der relativen Abweichungen von  $w_{0,\sigma,Abb}$  und zu  $w_{0,\sigma,IFTA}$  nach:

$$\text{relative Strahlradius-} \quad \Delta w = \left( \frac{w_{0,\sigma,Abb}}{w_{0,\sigma,IFTA}} - 1 \right) \cdot 100 \% \quad (3-34)$$

abweichung

berechnet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-36** dargestellt.



**Abb. 3-36** Darstellung der berechneten Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit der relativen Abweichung zwischen  $w_{0,\sigma,Abb}$  und  $w_{0,\sigma,IFTA}$  mit Spline-Interpolation zwischen den Messwerten zur Verbesserung der Übersichtlichkeit

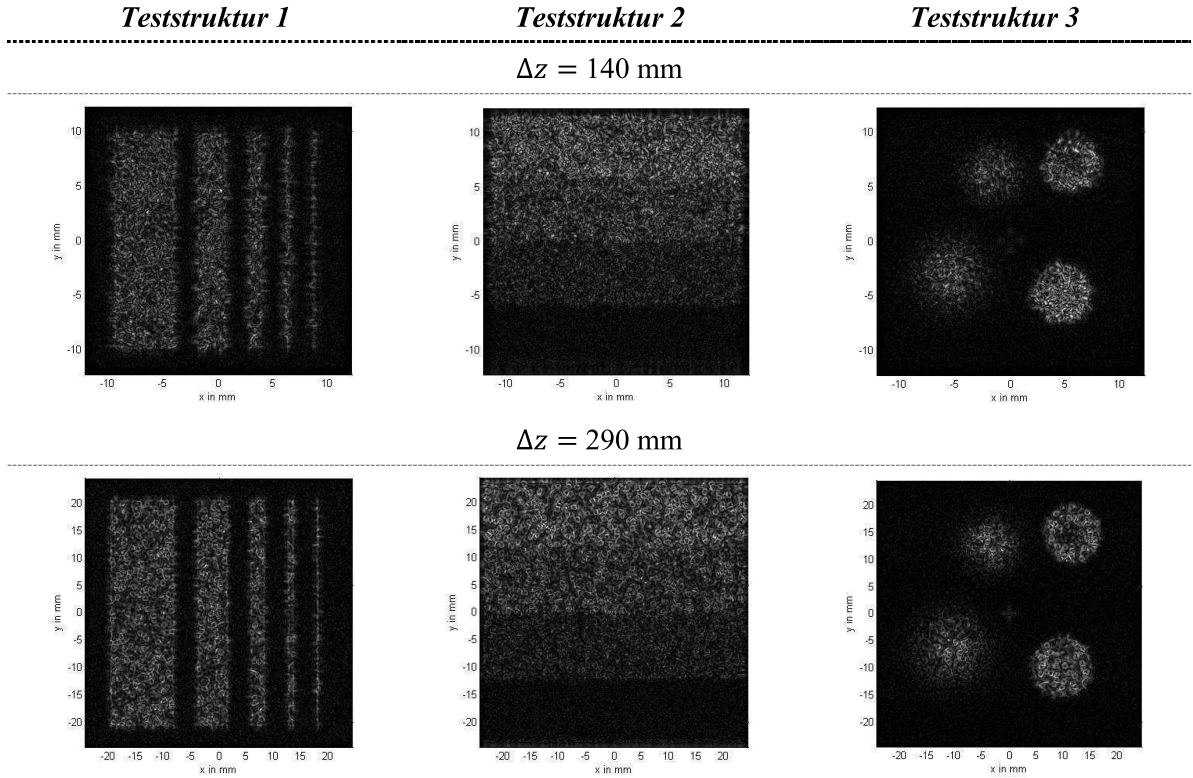
Anhand der Darstellung ist erkennbar, dass sich die berechnete Summe der quadratischen Abweichungen für einen kleineren verwendeten Strahlradius gleicht. Der Verlauf der jeweiligen Kurven mit  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$  und  $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$  für  $\Delta w < 0$  ist nahezu identisch. Lediglich für größere Radien existieren Abweichungen. Für  $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$  ist die Summe der quadratischen Abweichungen bis zu einer bestimmten Grenze etwas größer als für  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$  – ab der Grenze kleiner. Der Grund ist, dass die Bilder für einen größeren Strahlradius, wie unter **3.5.1** beschrieben, schärfer und kontrastreicher werden. Die höhere Auflösung führt dazu, dass Abweichungen die Summe der quadratischen Abweichungen stärker beeinflussen. Der Schnittpunkt der beiden Kurven von  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \mu\text{m}$  und  $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$  ist genau der Punkt, an welchem sich die in **Abb. 3-35** sichtbaren Kreise durch die höhere Intensität vom Untergrund absetzen. Dieser Effekt wird bei Teststruktur 1 erst bei einer späteren relativen Abweichung sichtbar. Weiterführende Untersuchungen, die dieses Phänomen erklären könnten, sind aufgrund des begrenzten Umgangs dieser Arbeit nicht durchgeführt worden.

Weiterhin liegt das Minimum der quadratischen Abweichungen für  $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$  nicht bei  $\Delta w = 0$ , sondern bei  $\Delta w < 0$ . Die Beugungsbilder sind für  $\Delta w < 0$  etwas unschärfer als für  $\Delta w = 0$ . Dadurch ist die Summe der quadratischen Abweichungen etwas niedriger. Optisch ist zwischen den Bildern nur ein geringer bis kein Unterschied sichtbar.

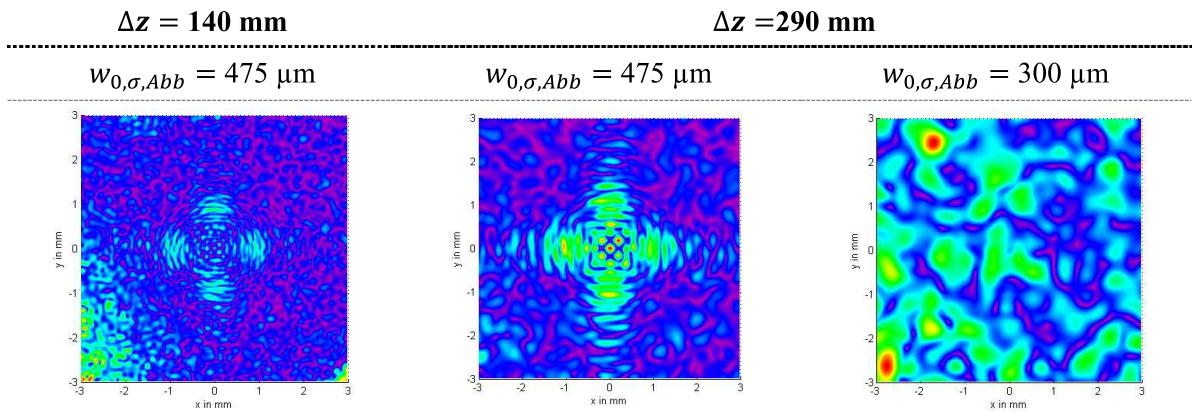
Die Bilder aus **Abb. 3-35** wurden für das Nahfeld mit Linsenterm berechnet. Zur Bestimmung der Auswirkungen einer Radiusänderung in größeren Entfernungen werden weitere Beugungsbilder von den drei Teststrukturen in verschiedenen Entfernungen berechnet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-37** abgebildet.

In einer größeren Entfernung werden ohne Linsenterm keine Ringe sichtbar. In noch größerer Entfernung sind die Ringe wieder sichtbar. Die sehr weite Entfernung stellt das Fernfeld dar. Mit guter Näherung kann das Beugungsbild, wie bereits in vorherigen Unterkapiteln beschrieben, auch für sehr große Entfernungen scharf abgebildet werden. Der Linsenterm sorgt dafür, dass die Abbildung in einer definierten Entfernung  $\Delta z$  scharf wird, statt im Unendlichen (vgl. **3.2**). Somit gleichen sich die Bilder aus **Abb. 3-35** (unten) denen aus **Abb. 3-37** für sehr große Entfernungen. In der Abbildung von Teststruktur 3, für eine Entfernung von  $\Delta z = 290 \text{ mm}$ , fällt der Bereich in der Mitte auf. Daher ist dieser in **Abb. 3-38** vergrößert für beide Entfernungen separat dargestellt.





**Abb. 3-37** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Teststrukturen; Phasenverteilung berechnet für:  $w_{0,\sigma,IFTA} = 200 \text{ } \mu\text{m}$ ; Abbildung berechnet mit  $w_{0,\sigma,Abb} = 475 \text{ } \mu\text{m}$ ; ohne Linsenterm; oben:  $N_x = 2^{12}$ ; unten:  $N_x = 2^{13}$ ; restliche Parameter aus **Tab. 3-10**



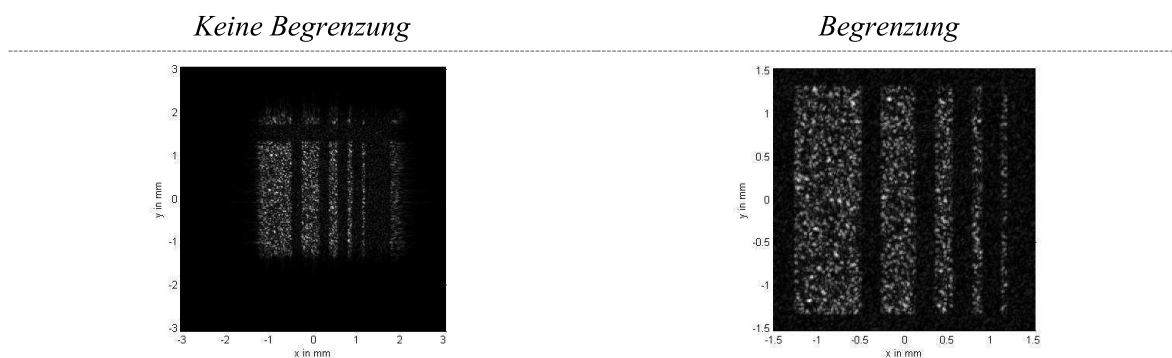
**Abb. 3-38** vergrößerte Darstellung der Mittenbereiche für Teststruktur 3 für verschiedene Entfernungen und verwendete Strahlradien  $w_{0,\sigma,Abb}$ ; links:  $N_x = 2^{12}$ ; Mitte und rechts:  $N_x = 2^{13}$ ; Falschfarbendarstellung zur besseren Sichtbarkeit

Der Verlauf gleicht einer räumlichen Sinc-Funktion. In Strukturen, bei denen das Beugungsbild die Mitte bedeckt, fällt dieser Bereich nur wenig (siehe Teststruktur 2) bis gar nicht (siehe Teststruktur 1) auf. Mit zunehmender Entfernung ist die Sinc-Funktion stärker ausgeprägt, taucht jedoch im Nahfeld mit Linsenterm nicht auf. Wird hingegen ein Strahlradius zur

Berechnung der Abbildung von  $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$  verwendet, entsteht keine Sinc-Funktion. Dieser Sachverhalt ist ebenfalls in **Abb. 3-38** dargestellt. Die Sinc-Funktion stellt das Beugungsbild des Gaußstrahles bzw. allg. des Ausgangsstrahlprofils an der DOE-Struktur selbst dar. Die Begrenzung des DOE wirkt wie ein Spalt und erzeugt ein typisches Beugungsmuster. Das DOE hat durch eine Elementgröße von  $\Delta x_{DOE} = 6 \mu\text{m}$  und einer Elementanzahl von  $N_x = 2^8$  eine Ausdehnung  $D_x = 1530 \mu\text{m}$ . Der Strahl selbst hat einen Durchmesser von  $D_\sigma = 950 \mu\text{m}$ . Für eine beugungsfreie Abbildung eines Gaußstrahls ist ein Verhältnis von Begrenzung zu Strahldurchmesser von 2,5 notwendig. Dies ist im gewählten Beispiel nicht erfüllt, wodurch die Sinc-Funktion in der Mitte entsteht. Das DOE sollte demnach eine ausreichende Größe in Bezug zu den Strahlabmessungen besitzen.

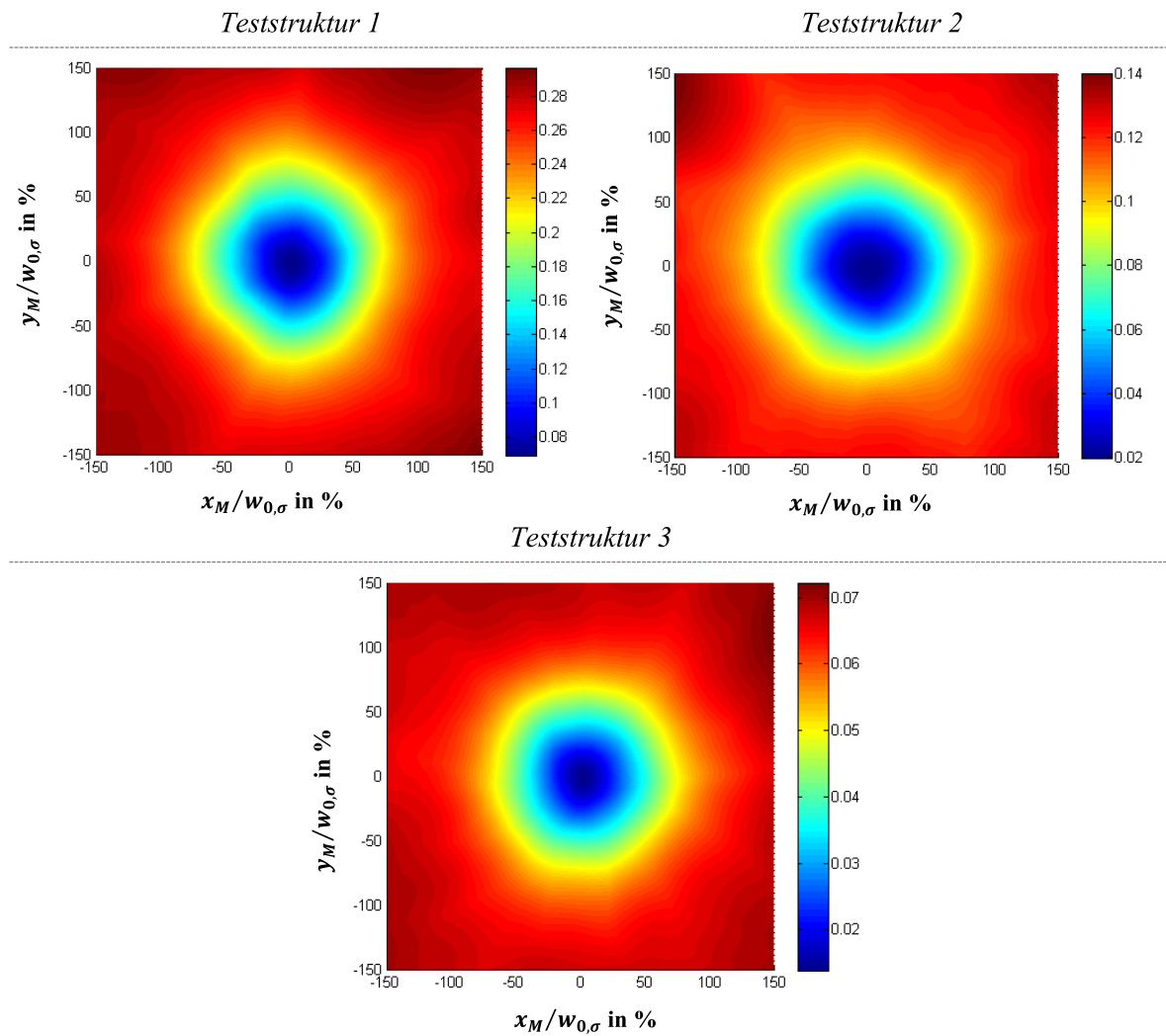
### 3.5.3 Laterale Verschiebung der Strahlquelle

In diesem Unterkapitel soll der Einfluss einer lateralen Verschiebung der Strahlquelle auf das erhaltene Beugungsbild geklärt werden. Im IFTA wird mit einer zentrischen Strahlquelle gerechnet, anschließend die Quelle in verschiedene Richtungen verschoben und die Abbildung berechnet. Die Verschiebung in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung erfolgt um  $x_M$  bzw.  $y_M$ . Für jede Berechnung wird die gleiche Anfangsphase verwendet. Für die Berechnung wird der bei der Fresnel-Näherung im Spektralraum und dem Winkelspektrum ebener Wellen auftretende Umklappprozess explizit ausgenutzt. Die Beugungsbilder werden durch den Effekt komplett im begrenzten Bereich dargestellt. Die Summe der quadratischen Abweichungen kann direkt gebildet werden. Zur Veranschaulichung des Effektes ist dieser für ein Beugungsbild beispielhaft in **Abb. 3-39** dargestellt.



**Abb. 3-39** Darstellung der berechneten Beugungsbilder; links: ohne Umklappprozess,  $N_x = 2^{10}$ ; rechts: mit Umklappprozess aufgrund der Begrenzung der Abbildungsfläche,  $N_x = 2^9$ ; für beide Darstellungen:  $x_M = y_M = w_{0,\sigma} = 300 \mu\text{m}$

Als Qualitätsmerkmal dient die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen Abbildung und gewünschter Bildverteilung. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-40** in Abhängigkeit von der Verschiebung in  $x$ - und  $y$ -Richtung,  $x_M$  und  $y_M$ , im Verhältnis zum Strahlradius  $w_{0,\sigma}$  dargestellt. Zur Berechnung werden die Parameter aus **Tab. 3-11** verwendet.



**Abb. 3-40** Darstellung der erhaltenen Summe der quadratischen Abweichungen in Abhängigkeit der Position der zur Abbildung verwendeten Strahlquelle bezogen auf den verwendeten Strahlradius  $w_{0,\sigma}$  in %

**Tab. 3-11** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes vom lateralen Versatz der Strahlquelle

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl	Gaußstrahl
	$w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	$w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$

Elementanzahl $N_x$ :	$2^9$	$2^9$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$18,5 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	

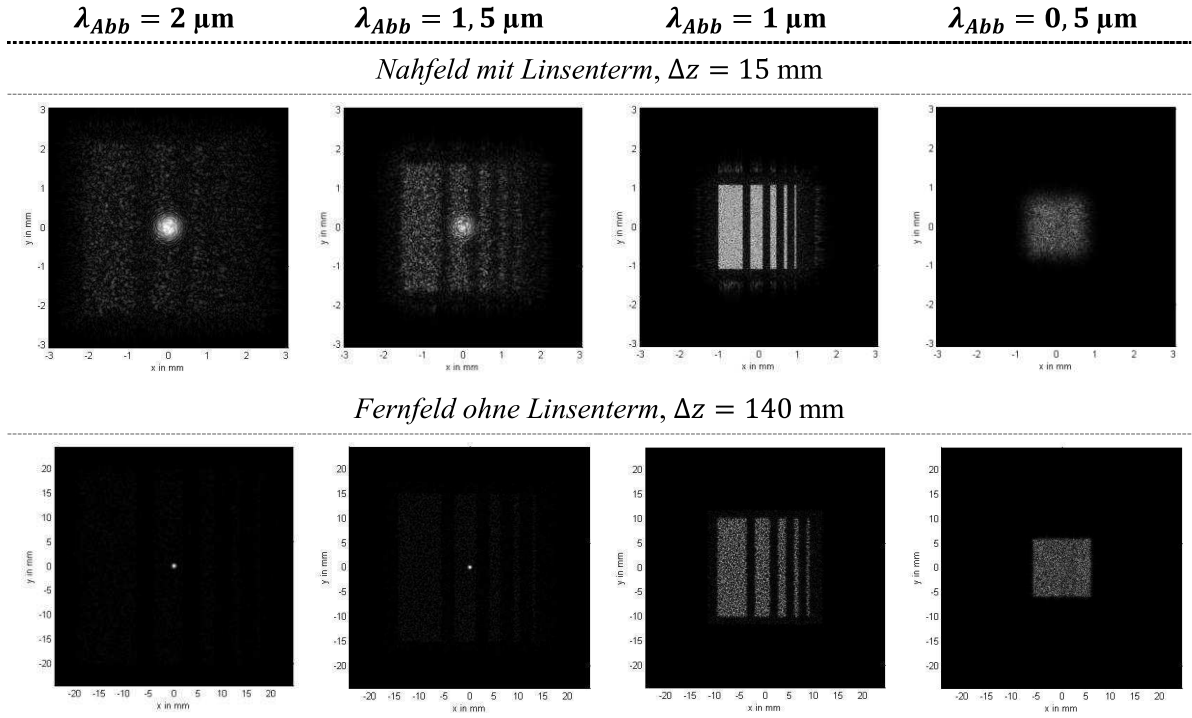
**Abb. 3-40** weist für alle drei Teststrukturen einen ähnlichen Verlauf der Summe der quadratischen Abweichungen auf. Die maximale Summe unterscheidet sich für jede Teststruktur. Der Verlauf ist für alle drei Strukturen annähernd rotationssymmetrisch. Somit existiert keine Vorzugsrichtung der Verschiebung und die Abweichungen des erhaltenen Beugungsbildes sind unabhängig von der Verschiebungsrichtung.

### 3.5.4 Variation der Wellenlänge

In diesem Unterkapitel sollen die Effekte bei einer Veränderung der Wellenlänge aufgezeigt werden. Das DOE wird für die Wellenlänge  $\lambda_{IFTA}$  berechnet. Für die Abbildung wird eine andere Wellenlänge  $\lambda_{Abb}$  verwendet. Zur Verdeutlichung der Auswirkungen sind einige ausgewählte Beispiele für das Nah- und Fernfeld in **Abb. 3-41** dargestellt. Die Parameter für die Simulationen sind in **Tab. 3-12** zusammengefasst.

**Tab. 3-12** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit des entstehenden Beugungsbildes von der Wellenlänge

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$0,5 - 2 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^{10} - 2^{13}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$15 - 140 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja/nein
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-41** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nah- (oben:  $N_x = 2^{10}$ ) und Fernfeld (unten:  $N_x = 2^{13}$ ) für verschiedene Wellenlängen  $\lambda_{Abb}$ ;  $\lambda_{IFTA} = 1 \mu\text{m}$

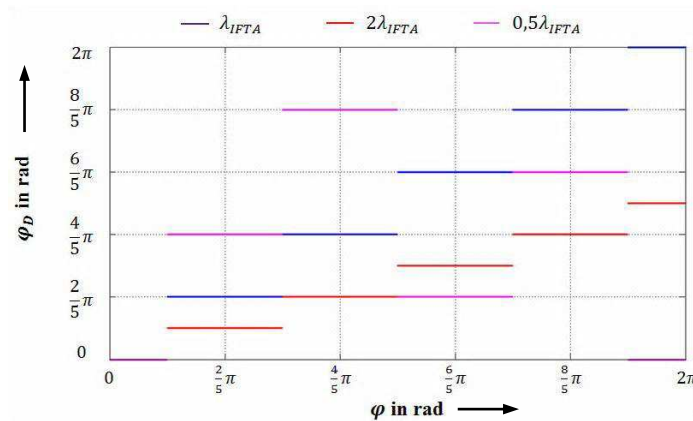
Eine Veränderung der verwendeten Laserwellenlänge  $\lambda_{Abb}$  in Bezug auf die im IFTA verwendete Wellenlänge  $\lambda_{IFTA}$  führt zu einer Größenänderung des Beugungsbildes nach (3-10) bzw. (3-13). Weiterhin beeinflusst eine Abweichung der Wellenlänge das Beugungsbild qualitativ, was in Abb. 3-41 deutlich zu sehen ist. Die Strukturen können mit Linsenterm im Nahfeld bei einer Abweichung der Wellenlänge nicht scharf abgebildet werden. Die Ursache ist, dass der Linsenterm nach (3-4) durch Multiplikation mit  $k_0$  in eine Phasenlage umgewandelt wird. Die Wirkung ist demnach nur für die Wellenlänge  $\lambda_{IFTA}$  korrekt, da  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_{IFTA}}$  gilt. Bei einer größeren Wellenlänge als eigentlich berechnet, wird in der Mitte die 0. Unterordnung sichtbar, d. h. die Beugungseffizienz verringert sich. Die Struktur ist dennoch schwach erkennbar. Ihre Feldstärke ist wesentlich geringer, was besonders gut im Fernfeld zu sehen ist. Die Struktur wird im Fernfeld auch bei abweichender Wellenlänge scharf. Für eine größere Wellenlänge steigt zwar die theoretisch mögliche Anzahl an Diskretisierungsstufen um den Faktor  $\frac{\lambda_{Abb}}{\lambda_{IFTA}}$ , jedoch reduziert sich die maximale Phasenverschiebung um den Kehrwert des Faktors. Dadurch sind die Verschlechterungen erklärbar. Die Herleitung dieses Sachverhaltes ist im **Anhang** zu finden. Für die halbe Wellenlänge wurde im gewählten Beispiel kein Beugungsbild sichtbar. Die Ursache kann mit Hilfe von Abb. 3-42 erklärt werden. Die Darstellung zeigt den Verlauf der diskretisierten Phasenlage für 5 Stufen von  $\lambda_{IFTA}$  und die sich ergebende Phasenlage für die doppelte und halbe Wellenlänge. Während sich für die doppelte Wellenlänge immer die halbe Phasenlage ergibt,

erfolgt bei halber Wellenlänge eine Verdopplung. Ein Phasenunterschied größer als  $2 \cdot \pi$  kann über:

Reduzierung der  
Phasenlage

$$\varphi_{Red} = \varphi - 2 \cdot \pi \cdot \left\lfloor \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \right\rfloor \quad (3-35)$$

in das Intervall  $[0; 2 \cdot \pi]$  reduziert werden. Zwischen den beiden Phasenlagen existiert kein konstantes Verhältnis mehr und das Beugungsbild ist entsprechend schlecht rekonstruierbar.



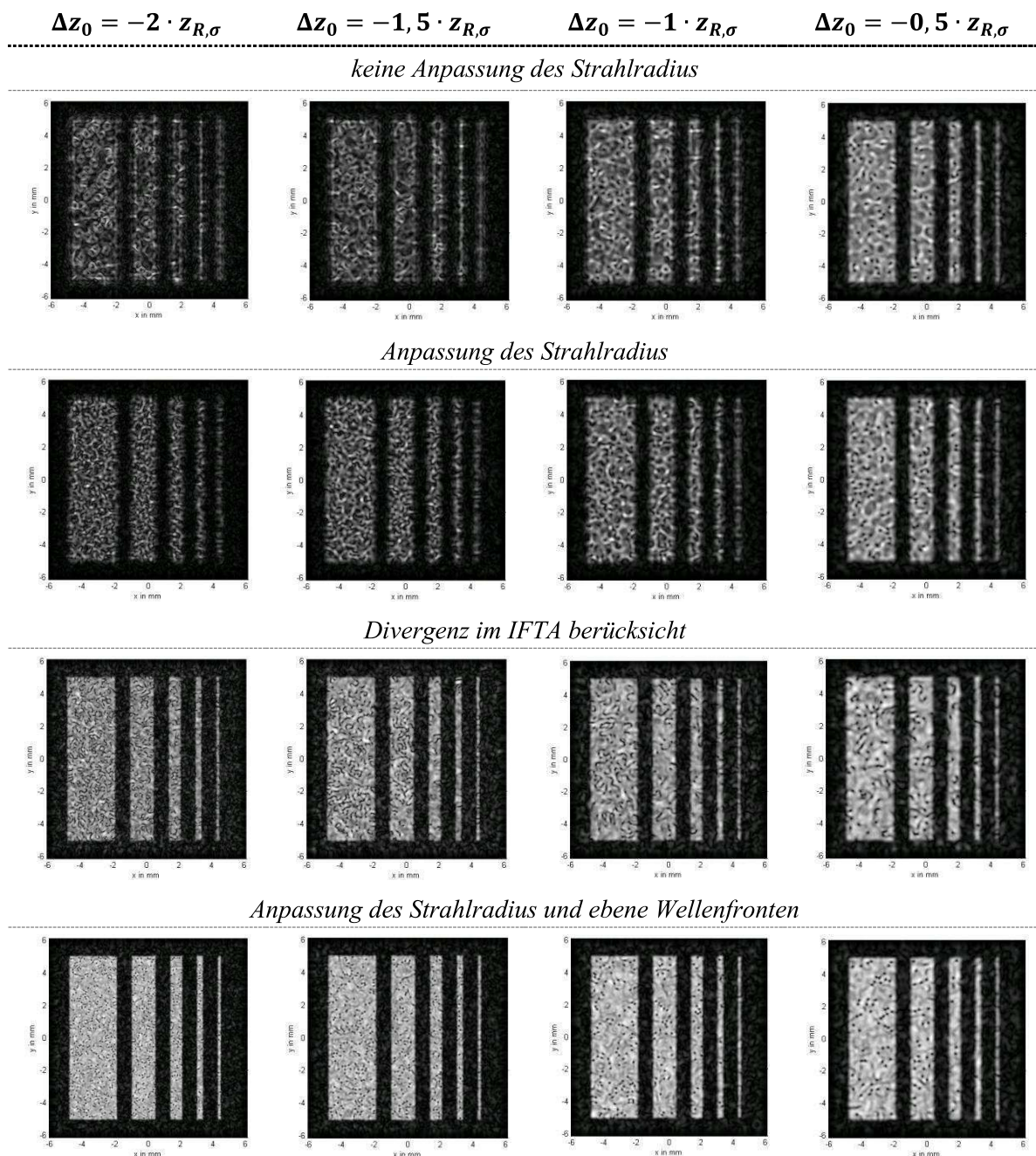
**Abb. 3-42** Darstellung der Ergebnisse der Diskretisierung mit  $p = 5$  und die sich ergebende Phasenlage für  $\lambda_{Abb} = \lambda_{IFTA}$ ,  $\lambda_{Abb} = 2 \cdot \lambda_{IFTA}$  und  $\lambda_{Abb} = 0,5 \cdot \lambda_{IFTA}$  nach Reduzierung

### 3.5.5 Divergente und konvergente Wellenfronten

Die Untersuchungen in diesem Unterkapitel sollen den Einfluss der Abweichungen der zur Abbildung verwendeten Wellenfronten von einer ebenen Wellenfront klären. Die DOE-Ebene wird in verschiedene Entfernungen von der Tailenposition  $z_0$  gelegt und der Laserstrahl propagiert zunächst von der Taille zur DOE-Ebene. Für ein ausgewähltes Beispiel sind die Ergebnisse in **Abb. 3-43** veranschaulicht. Da sich kein Unterschied zwischen Positionen vor und nach der Taille, d. h. ob konvergente oder divergente Wellenfronten vorliegen, ergibt, sind lediglich die Positionen vor der Taille aufgeführt. Die Parameter werden aus **Tab. 3-13** und ein Tailenradius von  $w_{0,\sigma} = 100 \mu\text{m}$  verwendet. Die Verschiebung der Strahlquelle in Bezug zur Lage des DOEs führt zu einen größeren Strahlradius in der DOE-Ebene. Der IFTA wurde nicht für diesen Strahlradius durchgeführt. Daher wurde, um die alleinigen Auswirkungen der Änderungen der Wellenfronten festzustellen, die Phasenlage des DOEs mit dem sich in der DOE-Ebene ergebenden Strahlradius nach (3-21) mit  $\Delta z = \Delta z_0$  berechnet. Eine unzureichende Justage beinhaltet keine Anpassung. Daher ist der Fall ohne Radiuskorrektur auch aufgeführt. Die nichtebenen Wellenfronten wurden weitgehend korrigiert, was durch die Verwendung von entgegengesetzt gekrümmten Wellenfronten im IFTA möglich ist. Die Ergebnisse dazu und ein



Vergleich mit den sich ergebenden Beugungsbildern mit ebenen Wellenfronten sind ebenfalls in **Abb. 3-43** zusammen gefasst.



**Abb. 3-43** Darstellung der sich ergebenden Beugungsbilder für konvergente Wellenfronten in der DOE-Ebene für verschiedene Anwendungsfälle

**Tab. 3-13** Übersicht der Parameter zur Bestimmung des Einflusses nichtebener Wellenfronten

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 100 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{\sigma,Abb}(\Delta z_0)$

Wellenlänge $\lambda_0$ :	1 $\mu\text{m}$	1 $\mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^9$	$2^{11}$
Elementgröße $\Delta x$ :	6 $\mu\text{m}$	6 $\mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	70 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	

**Abb. 3-43** zeigt, dass eine Korrektur des Strahlradius im IFTA notwendig ist, um die alleinigen Auswirkungen der Abweichungen von ebenen Wellenfront darzulegen. Anderenfalls überlagern sich zwei Effekte. Zum einen der bereits unter **3.5.2** beschriebene Effekt bei Verwendung eines anderen Strahlradius zur Berechnung der Abbildung und zum anderen die Effekte nichtebener Wellenfronten.

Eine Abweichung von ebenen Wellenfronten führt zu einer Verschlechterung des Strahlprofils. Die Größe der 0. Ordnung bleibt unverändert, jedoch erhöht sich nach **(3-23)** die Gesamtgröße des Beugungsbildes durch den veränderten Strahlradius. Aufgrund der stochastischen Schwankungen und der geringen Radiusunterschiede sind kaum Unterschiede erkennbar.

Die Verschlechterung ist nicht vom Krümmungsradius der Wellenfront abhängig, denn nach:

*Krümmungsradius der  
Wellenfront eines  
Gaußstrahls*

$$R(\Delta z_0) = \Delta z_0 \cdot \left( 1 + \left( \frac{z_{R,\sigma}}{\Delta z_0} \right)^2 \right) \quad (3-36)$$

ergibt sich für  $\Delta z_0 = -2 \cdot z_{R,\sigma}$  und  $\Delta z_0 = -0,5 \cdot z_{R,\sigma}$  der gleiche Krümmungsradius und für die anderen beiden Entfernungen ist der Krümmungsradius kleiner. Das Beugungsbild besitzt für  $\Delta z_0 = -2 \cdot z_{R,\sigma}$  wesentlich mehr Inhomogenitäten und verrundete Kanten als für  $\Delta z_0 = -0,5 \cdot z_{R,\sigma}$ . Eine mögliche Erklärung ist, dass für  $\Delta z_0 = -2 \cdot z_{R,\sigma}$  ein größerer Strahlradius vorliegt und somit mehr Pixel mit einer abweichenden Phasenlage zur Bildentstehung beitragen, als für einen kleinen Strahlradius. Für die Verschlechterung könnte die Summe der Pixel mit abweichender Phasenlage entscheidend sein.

Die nichtebene Wellenfront kann durch Verwendung eines Strahlprofils mit entgegengesetzter Wellenfront im IFTA annähernd ausgeglichen werden. Die sich ergebenden Beugungsbilder weichen leicht von den Beugungsbildern mit ebener Wellenfront ab. Der Grund dafür konnte bisher nicht geklärt werden. Die Abweichungen treten auch bei kontinuierlichen Phasenlagen auf.



### 3.5.6 Variation des Strahlprofils

In den bisherigen Betrachtungen wurde angenommen, dass das Strahlprofil eine Gaußverteilung ist. In der Realität besitzen nur die wenigsten Laserstrahlen eine ideal gaußförmige Intensitätsverteilung. Daher soll im Folgenden der Einfluss verschiedener Strahlverteilungen auf das erhaltene Beugungsbild untersucht werden.

Ein Gaußstrahl ist ein Spezialfall der Gauß-Hermite- bzw. Gauß-Laguerre-Moden und wird deswegen oft als Grundmode bezeichnet. Gauß-Hermite-Moden werden an der Position  $z = z_0$ , d.h. an der Strahltaille, und zum Zeitpunkt  $t = 0$  über die folgende Form beschrieben [Olb2009]:

*Gauß-Hermite-Moden:*

$$E_{mn}(x, y) = E_{max,00} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{m+n} \cdot m! \cdot n! \cdot \pi}} \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{w_{0,\sigma,x,0}}\right) \cdot e^{-\frac{x^2}{w_{0,\sigma,x,0}^2}} \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2} \cdot y}{w_{0,\sigma,y,0}}\right) \cdot e^{-\frac{y^2}{w_{0,\sigma,y,0}^2}} \quad (3-37)$$

Die Indizes  $m$  und  $n$  stellen die Ordnung der Mode dar.  $w_{0,\sigma,x,0}$  bezeichnet den Tailenradius des Grundmodes in  $x$ -Richtung und  $H$  die Hermiteschen Polynome, die nach der Rekursionsformel:

$$H_m(x) = 2(x \cdot H_{m-1}(x) - (m-1) \cdot H_{m-2}(x))$$

*Rekursionsformel zur  
Bildung der Hermiteschen  
Polynome*

$$H_0(x) = 1 \quad (3-38)$$

$$H_1(x) = 2 \cdot x$$

berechnet werden können. Die Gauß-Laguerre-Moden werden für die oben genannten Bedingungen über:

*Gauß-Laguerre-Moden:*

$$E_{lp}(x, y) = E_{max,00} \cdot \sqrt{\frac{2p!}{(1 + \delta_{0l}) \cdot (p+l)! \cdot \pi}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2} \cdot r}{w_{0,\sigma,00}}\right)^l \cdot L_p^l\left(\frac{2 \cdot r^2}{w_{0,\sigma,00}^2}\right) \cdot e^{-\frac{r^2}{w_{0,\sigma,00}^2}} \cdot e^{i \cdot l \cdot \alpha} \quad (3-39)$$

beschrieben.  $r$  steht in diesem Zusammenhang für den Abstand zum Koordinatenursprung. Die Indizes  $l$  und  $p$  kennzeichnen die Ordnung der Mode und  $L_p^l$  bezeichnet die Laguerre-Polynome, welche durch die Reihendarstellung:

*Reihendarstellung zur  
Bildung der Laguerre  
Polynome*

$$L_p^l(x) = \sum_{s=0}^p (-x)^s \frac{(p+l)!}{(l+s)! \cdot (p-s)! \cdot s!} \quad (3-40)$$

gegeben sind.  $\alpha$  steht in diesem Zusammenhang für den Azimutwinkel, der sich aus  $\arctan \frac{y}{x}$  berechnet. Der Strahlradius auf Basis des 2. Moments einer Mode ist durch die Beziehung:

$$\begin{aligned}
 w_{\sigma,x,m}(z) &= w_{\sigma,x,0}(z) \cdot \sqrt{2 \cdot m + 1} \\
 w_{\sigma,y,n}(z) &= w_{\sigma,y,0}(z) \cdot \sqrt{2 \cdot n + 1} \\
 w_{\sigma,l,p}(z) &= w_{\sigma,0,0}(z) \cdot \sqrt{2 \cdot p + l + 1}
 \end{aligned}
 \tag{3-41}$$

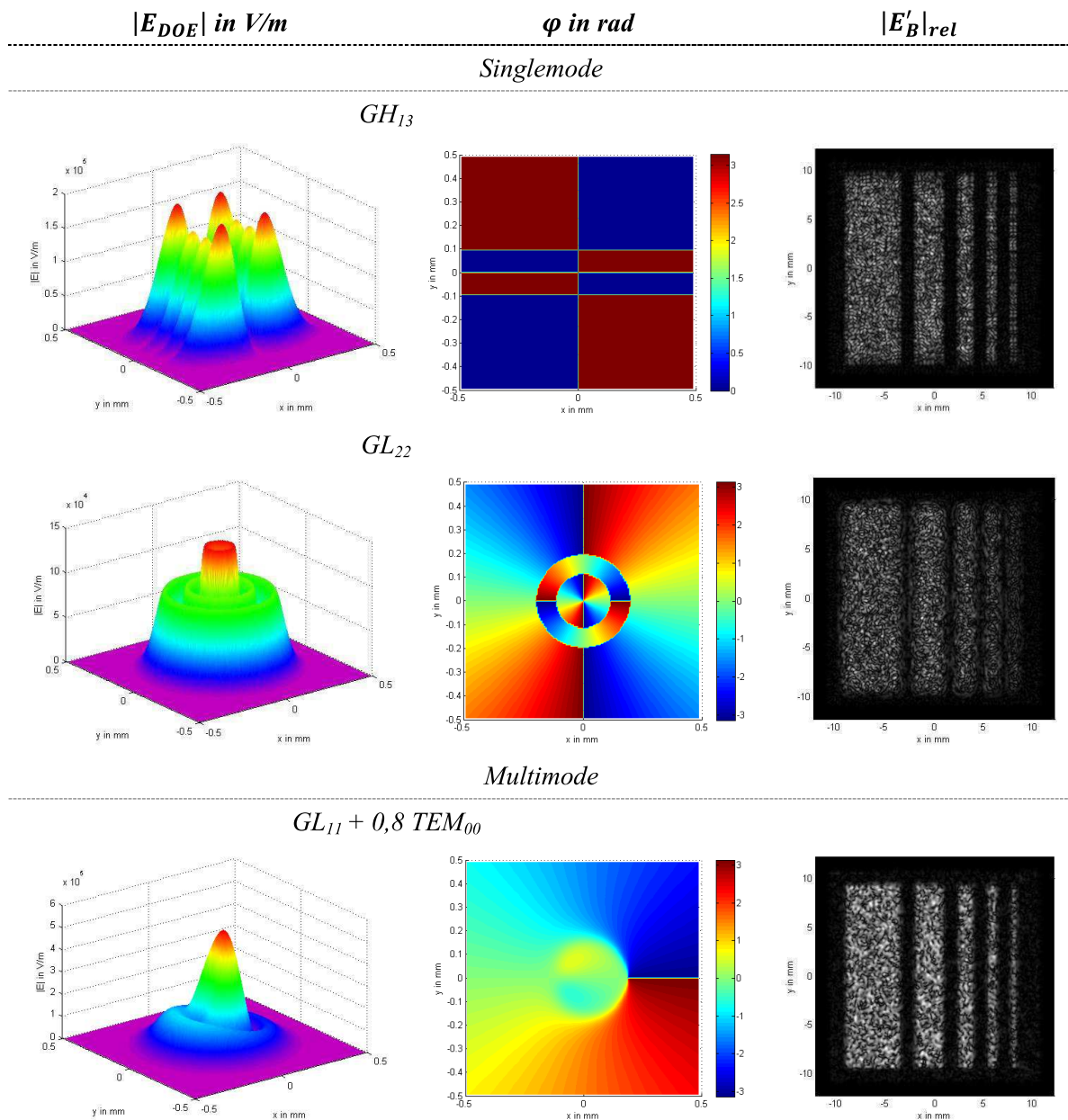
*Strahlradius der Moden  
höherer Ordnung*

aus dem Strahlradius des Grundmodes berechenbar. Gauß-Hermite- und Gauß-Laguerre-Moden werden durch die Bezeichnung  $\text{TEM}_{mn}$  bzw.  $\text{TEM}_{lp}$  gekennzeichnet. Eine Unterscheidung anhand der Bezeichnung wäre deshalb nicht möglich. Daher wird im Weiteren die Bezeichnung  $\text{GH}_{mn}$  für Gauß-Hermite- bzw.  $\text{GL}_{lp}$  für Gauß-Laguerre-Moden gewählt.

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen einer Strahlprofiländerung sind einige ausgewählte Beispiele in **Abb. 3-44** dargestellt. Für die Berechnung werden die Parameter aus **Tab. 3-14** verwendet. Für den verwendeten Multimode-Strahl werden die beiden verwendeten Moden nach dem Superpositionsprinzip überlagert und die Simulation mit dem überlagerten Strahlprofil durchgeführt. Eine separate Propagation jeder Mode und anschließende Superposition der beiden Beugungsbilder ergibt ein annähernd gleiches Gesamtbeugungsbild. Auf eine separate Darstellung wird verzichtet.

**Tab. 3-14** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung des Einflusses eines vom idealen Gaußstrahl abweichenden Strahlprofils

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	$\text{GH}_{13}$ ; $\text{GL}_{22}$ ; $\text{GL}_{11}$ +Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$1 \mu\text{m}$	$1 \mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^{12}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	$130 \text{ mm}$
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-44** Darstellung der verwendeten Strahlverteilungen sowie das sich damit ergebende Beugungsbild in der Abbildungsebene

**Abb. 3-44** zeigt, dass ein von der Berechnung im IFTA abweichendes Strahlprofil zu einer Verschlechterung des Beugungsbildes führt. Neben dem abweichenden Strahlprofil besitzen Moden höherer Ordnung auch im Fokus keine einheitlich ebene Wellenfront mehr, sodass die bereits unter 3.5.5 beschriebenen Effekte für nichtebene Wellenfronten überlagert werden. Die Effekte können nicht unabhängig voneinander untersucht werden. Die Abbildung zeigt, dass die Auswirkungen durch die nichtebenen Wellenfronten einen größeren Einfluss haben. Eine  $GH_{13}$ -Mode besitzt ein stark abweichendes Strahlprofil, jedoch nur zwei verschiedene und gebietsweise konstante Phasenlagen. Die gewünschte Struktur ist im Beugungsbild noch sehr gut erkennbar, aber nicht so homogen wie für einen Gaußstrahl. Das Beugungsbild des  $GL_{22}$  besitzt verwaschene

Kanten und die Struktur ist schlecht erkennbar, obwohl das Strahlprofil nicht so stark von einem Gaußstrahl wie ein  $\text{GH}_{13}$  abweicht.

Das verwendete Beispiel für einen Multimode-Strahl zeigt ebenfalls nur geringe Abweichungen. Der Grund ist, dass der Gaußstrahl eine deutlich höhere elektrische Feldstärke besitzt als der  $\text{GL}_{11}$ . Im Bereich der größten Feldstärke ist die Phasenlage nahezu eben und das Profil annähernd gaußförmig verteilt.

### 3.6 Nah- und Fernfeld

In diesem Unterkapitel soll geklärt werden in welcher Entfernung  $\Delta z$  sich die Abbildungsebene von der DOE-Ebene befinden muss, um ein scharfes Bild ohne Linsenterm zu erhalten. Der Bereich ab dieser bestimmten Entfernung wird als Fernfeld bezeichnet. Das exakte Beugungsbild wird bei einem Fourier-Element theoretisch erst im Unendlichen sichtbar, wodurch auch in einer großen Entfernung  $\Delta z$  eine Abweichung zu erwarten ist.

In der Literatur existieren verschiedene Definitionen zur Abgrenzung von Nah- und Fernfeld. Nach Kress [Kres2009] beginnt das Fernfeld in einer Entfernung von:

$$\begin{array}{l} \text{Fernfelddefinition nach} \\ \text{Kress} \end{array} \quad \Delta z_{\text{Fern}} = 8 \cdot \frac{n_0 \cdot \Delta x_{\text{DOE}}^2}{\lambda_0} \quad (3-42)$$

Diese Entfernung ist jedoch viel zu gering damit die Strukturen ohne Linsenterm sichtbar werden. Träger [Trä2007] hingegen definiert die Anwendbarkeit der Fraunhofer-Näherung, die für das Fernfeld gültig ist, über einen Fehlerterm  $Q$ :

$$\begin{array}{l} \text{Fehlerterm der} \\ \text{Fraunhofer-Näherung} \\ \text{nach Träger} \end{array} \quad Q_{\text{Fraunhofer}} = \frac{n_0 \cdot D_{x,\text{DOE}}^2}{4 \cdot \lambda_0 \cdot \Delta z} \ll 1 \quad (3-43)$$

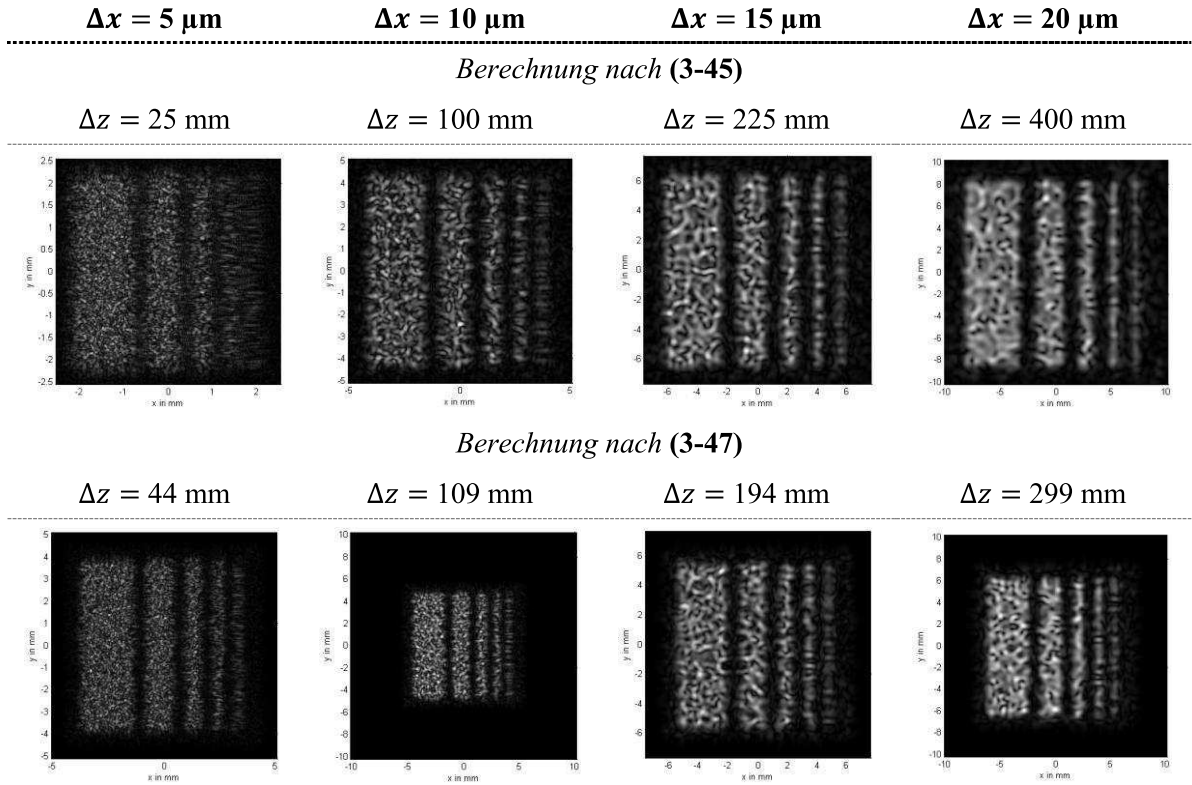
Der Fehlerterm soll für die Anwendbarkeit sehr viel kleiner als 1 werden. Die Ausdehnung  $D_{x,\text{DOE}}$  berechnet sich nach (2-8). Wird (3-43) nach  $\Delta z$  umgestellt, gilt:  $\Delta z_{\text{Fern}} \sim \frac{N_{x,\text{DOE}}^2}{Q_{\text{Fraunhofer}}}$ . Nach dieser Beziehung würden sich, je nach Elementanzahl, extrem große Entfernungen ergeben. Sinnvoll ist hingegen die Definition von Demtröder [Dem2006], der ebenfalls einen Fehlerterm definiert:

$$\begin{array}{l} \text{Fehlerterm nach} \\ \text{Demtröder} \end{array} \quad Q_{\text{Fern}} = \frac{n_0 \cdot \Delta x_{\text{DOE}}^2}{\lambda_0 \cdot \Delta z} \ll 1 \quad (3-44)$$

Wird als obere Grenze  $Q_{\text{Fern}} = 0,001$  gewählt, so ergibt sich der Beginn des Fernfeldes aus:

Beginn des Fernfeldes 
$$\Delta z_{Fern} \geq 1000 \cdot \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot \Delta x_{DOE}^2 \quad (3-45)$$

Diese Definition ist nicht für jede Elementgröße  $\Delta x_{DOE}^2$  allgemeingültig, was in **Abb. 3-45** oben sichtbar wird.



**Abb. 3-45** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Elementgrößen und Entfernungen,  $w_{0,\sigma} = 300 \mu m$ , Elementanzahlen nach (2-8) und (3-10), so dass keine Beschneidung der Strukturen entsteht

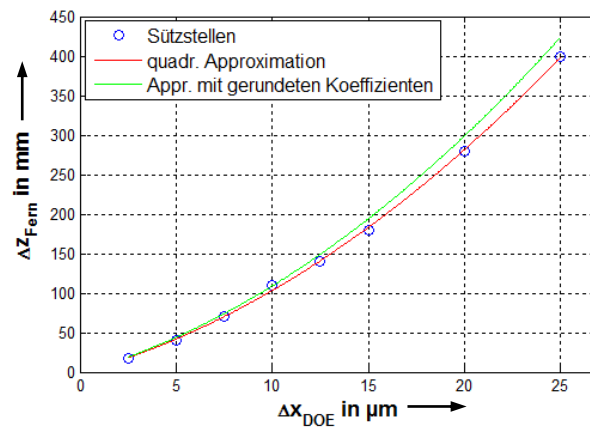
Aufgrund der Abweichungen in **Abb. 3-45** oben werden die Beugungsbilder für verschiedene Parameter und in verschiedenen Entfernungen betrachtet und nach einem subjektiven Eindruck die Entfernung  $\Delta z$  bestimmt, bei welcher eine Struktur sichtbar wird. Als Orientierung dienen die berechneten Entfernungen nach (3-45). Die subjektiv ermittelten Entfernungen werden in Abhängigkeit von der Elementgröße aufgetragen und mit Hilfe dieser Stützstellen eine quadratische Funktion approximiert. Die Koeffizienten werden auf ganze Zahlen aufgerundet, da die Ermittlung rein subjektiv ist. Die sich ergebenden Entfernungen  $\Delta z_{Fern}$  sind geringfügig größer als für die eigentliche Approximation. Die zur Approximation verwendeten Stützstellen, sowie die quadratische Approximation und die Approximation mit gerundeten Koeffizienten sind in **Abb. 3-46** zu finden.

*Beginn des Fernfeldes mit quadratischer Approximation:*

$$\Delta z_{\text{Fern}} \geq 1000 \cdot \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot (0,37 \cdot \Delta x_{\text{DOE}}^2 + 6,7 \mu\text{m} \cdot \Delta x_{\text{DOE}} - 1,2 \mu\text{m}^2) \quad (3-46)$$

*Beginn des Fernfeldes mit gerundeten Koeffizienten:*

$$\Delta z_{\text{Fern}} \geq 1000 \cdot \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot (0,4 \cdot \Delta x_{\text{DOE}}^2 + 7 \mu\text{m} \cdot \Delta x_{\text{DOE}} - 1 \mu\text{m}^2) \quad (3-47)$$











**Abb. 3-46** Darstellung der zur Approximation verwendeten Stützstellen, der exakten quadratischen Approximation und der quadratischen Approximation mit gerundeten Koeffizienten

### 3.7 Wiederholung der DOE-Strukturen

Die Berechnung bestimmter DOE-Strukturen kann je nach gewählten Parametern einige Zeit in Anspruch nehmen. Daher wird die Wiederholung und verschiedenartige Anordnung einer kleinen berechneten Struktur im Weiteren näher betrachtet, um so die Berechnungsdauer zu reduzieren und mögliche Vorteile aufzuzeigen. Drei Methoden der Anordnung, die in **Abb. 3-47** dargestellt sind, werden untersucht. Die Bereiche 1 bis 4 stellen Teilbereiche des zu wiederholenden DOEs dar. Das zu wiederholende DOE ist mit blau umrandet.

Methode 1 soll klären ob bei einem sehr großen Versatz der Strahlquelle eine korrekte Abbildung erhalten wird und welchen Einfluss die Lage der Strahlquelle bei einer wiederholten Struktur spielt. Die mittleren Strukturen sind die im DOE enthaltenen Teilbereiche, jedoch spiegelverkehrt. Die DOE-Struktur wird periodisch wiederholt. Methode 2 stellt ebenfalls eine periodische Wiederholung der Strukturen dar. Die Strahlquelle ist nicht versetzt. Methode 1 und 2 sind im Grunde gleich. Der dargestellte Ausschnitt ist anders. Auch bei Methode 3 erfolgt eine periodische Wiederholung der Strukturen. Die Strukturen sind jeweils so gespiegelt, dass sie stetig aneinander anschließen. Die Richtung der Spiegelung ist in **Abb. 3-47** durch die Pfeile

gekennzeichnet. Die Referenz bildet die normale DOE-Struktur ohne Versatz der Strahlquelle und ohne Wiederholung.

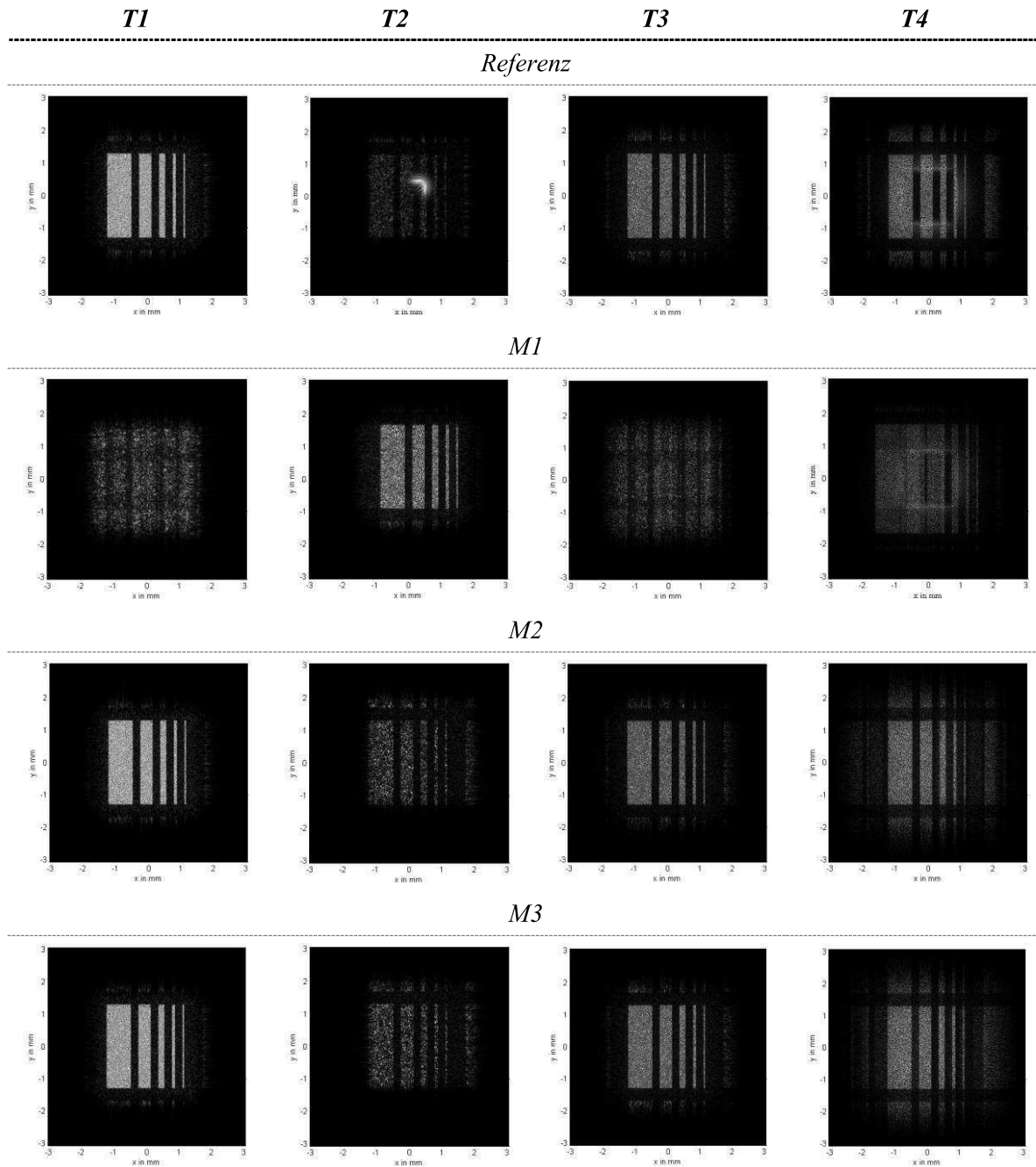
<i>Methode 1 (M1)</i>				<i>Methode 2 (M2)</i>				<i>Methode 3 (M3)</i>			
1	2	1	2	4	3	4	3	 1	 1	2	 2
3	4	3	4	2	1	2	1	 1	1	2	 2
1	2	1	2	4	3	4	3	3	3	4	4
3	4	3	4	2	1	2	1	 3	 3	4	 4

**Abb. 3-47** Darstellung möglicher Anordnung der gleichen DOE-Strukturen

Zur Überprüfung der verschiedenen Methoden werden vier Tests (T1 bis T4) durchgeführt. Test 1 beinhaltet die einfache Abbildung der Strukturen M1 bis M3. Test 2 dient der Untersuchung eines Versatzes der Strahlquelle. Die Verschiebung findet um jeweils 300  $\mu\text{m}$  in positive  $x$ - und  $y$ -Richtung statt. Test 3 zeigt den Einfluss eines größeren Strahlradius  $w_{0,\sigma,Abb}$  zur Berechnung der Abbildung im Gegensatz zu einem kleineren Strahlradius  $w_{0,\sigma,IFTA}$  im IFTA. Für Test 4 wird der Strahlradius noch stärker vergrößert. Er ist größer als die gesamte DOE-Struktur. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-48** dargestellt. Die Parameter sind in **Tab. 3-15** zusammen gefasst.

**Tab. 3-15** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der verschiedenen Testparameter für die drei Methoden M1 bis M3

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl T1 bis T3: $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$ T4: $w_{0,\sigma,IFTA} = 900 \mu\text{m}$	Gaußstrahl T1 und T2: $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$ T3: $w_{0,\sigma,Abb} = 475 \mu\text{m}$ T4: $w_{0,\sigma,Abb} = 900 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	1 $\mu\text{m}$	1 $\mu\text{m}$
Elementanzahl $N_x$ :	$2^7$	$2^{10}$
Elementgröße $\Delta x$ :	6 $\mu\text{m}$	6 $\mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	18 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	



**Abb. 3-48** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für die drei Methoden in den vier Tests

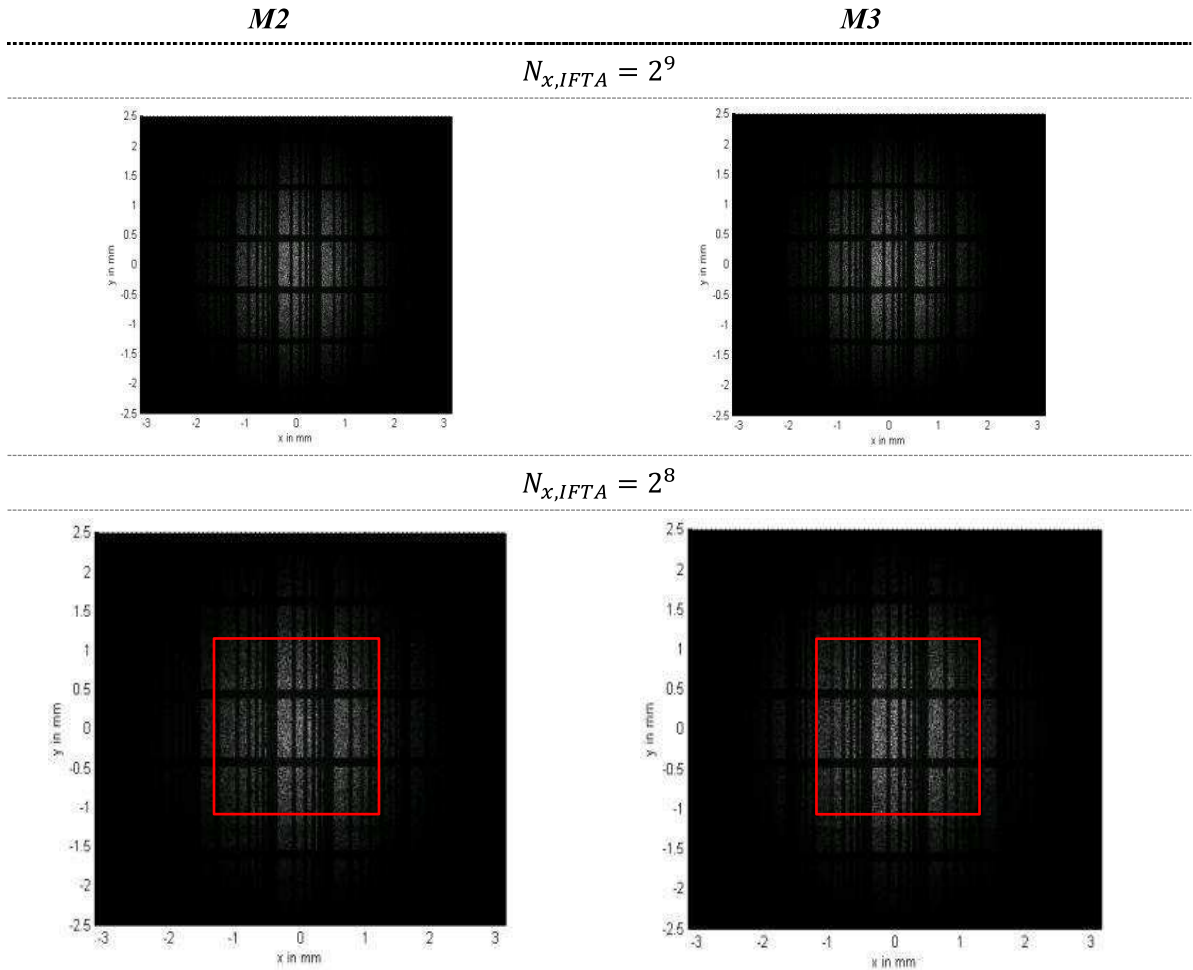
Methode 1 liefert die besten Ergebnisse bei Test 2, d. h. einem Versatz der Strahlquelle. Dies wird darauf zurückgeführt, dass die Mittelpunkte von DOE-Struktur und Strahlquelle durch die Verschiebung wieder annähernd übereinstimmen. Der Mittelpunkt der Strahlquelle befindet sich durch die Verschiebung in der rechten oberen Teilstruktur. Die Auswertung der anderen Tests zeigt unbefriedigende Ergebnisse. Das erhaltene Beugungsbild weicht im Erscheinungsbild stark von der Vorgabe ab.

Die anderen beiden Methoden, M2 und M3, können die Verschiebung der Strahlquelle nicht kompensieren. Die Ergebnisse sind geringfügig besser als bei der Referenz, jedoch



existieren Abweichungen von der gewünschten Idealstruktur. Auch die Erhöhung des Strahlradius in Test 3 kann nicht kompensiert werden und die erhaltenen Beugungsbilder gleichen der Referenz.

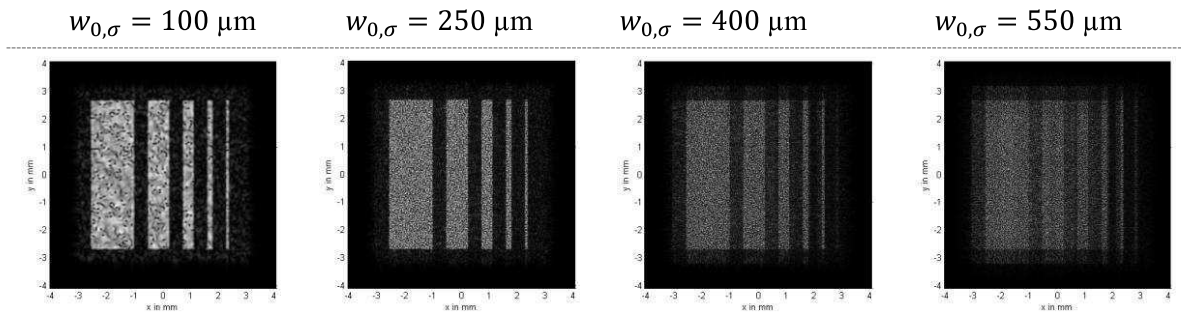
Die Ergebnisse der 0. Ordnung in Test 4 sind für die Methoden M2 und M3 besser als die der Referenz. Für die höheren Ordnungen ergeben sich Abweichungen. Daher werden auf Test 4 aufbauende Untersuchungen durchgeführt. Die Größe des Strahlradius wird auf  $w_{0,\sigma,IFTA} = w_{0,\sigma,Abb} = 1,2 \text{ mm}$  sowie die Elementgröße auf  $\Delta x_{DOE} = 8 \mu\text{m}$  erhöht und die Entfernung auf  $\Delta z = 7 \text{ mm}$  verringert. Die Änderungen sind notwendig um die Effekte deutlicher aufzeigen zu können. Eine Teilstruktur wird zum einen mit  $N_{x,IFTA} = 2^9$  und zum anderen mit  $N_{x,IFTA} = 2^8$  Elementen berechnet. Die Teilstrukturen werden nach Methode M2 und M3 wiederholt. Für  $N_{x,IFTA} = 2^9$  wird der Laserstrahl komplett durch das DOE abgedeckt. Werden hingegen  $N_{x,IFTA} = 2^8$  Elemente verwendet, wird nicht mehr der komplette Strahl abgedeckt. Weiterhin werden  $N_x = 2^{11}$  und die restlichen Parameter aus **Tab. 3-15** verwendet. Die Ergebnisse sind in **Abb. 3-49** dargestellt.



**Abb. 3-49** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Nahfeld für Methode 2 und 3

**Abb. 3-49** zeigt, dass sich beide Methoden bei der Verwendung einer DOE-Struktur eignen, die für einen Strahlradius berechnet ist, der viel größer als die Struktur selbst ist. Falls die Struktur so oft wiederholt wird, dass der komplette Laserstrahl abgedeckt ist, sind die Ergebnisse sehr gut. Wird nicht der komplette Strahl abgedeckt, werden auch hier die Ergebnisse wieder schlechter. Bei beiden Methoden erzeugen Anteile des Strahlprofils, die sich außerhalb der DOE-Struktur befinden, falsche Bildanteile. Die falschen Bildanteile befinden sich außerhalb der in **Abb. 3-49** rot gekennzeichneten Markierung. Bei Methode 2 erscheinen die unkorrekten Anteile spiegelverkehrt, bei Methode 3 in der Ausrichtung korrekt. Die falschen Bildanteile schließen direkt an die korrekten Bereiche, ohne den Rand der Beugungsstruktur, an. Daher kann keine Methode einen zu großen Strahlradius bei einer unvollständigen Abdeckung durch die DOE-Struktur kompensieren. Methode 2 ist einfacher zu implementieren. Bei kompletter Bedeckung des Ausgangsstrahlprofils liefert sie identische Ergebnisse mit Methode 3. Fortan wird deshalb Methode 2 verwendet.

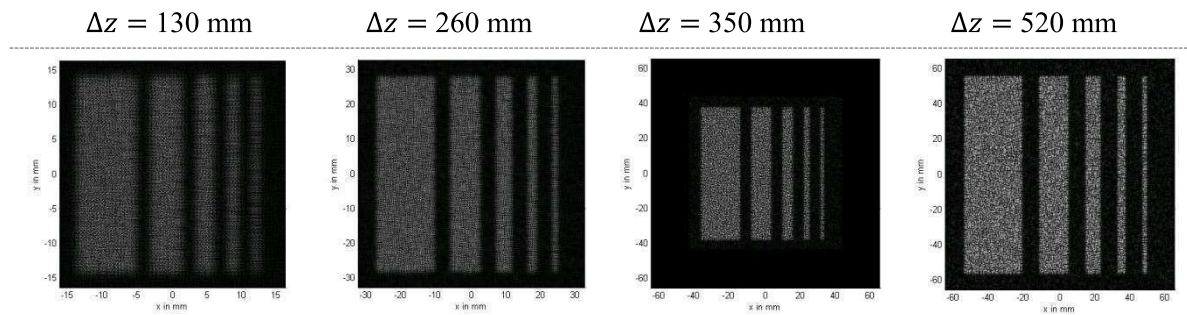
Die bisher in diesem Unterkapitel vorgestellten Untersuchungen wurden alle für das Nahfeld mit Linsenterm durchgeführt. Daher soll im Weiteren das Fernfeld thematisiert werden. Ein DOE, dessen Größe für einen Strahlradius von maximal  $w_{0,\sigma} = 100 \mu\text{m}$  ausgelegt ist, wird berechnet. Die Struktur wird sechs Mal nach Methode 2 wiederholt. In der Simulation erfolgt die Berechnung der Abbildung mit verschiedenen größeren Strahlradien. Die Parameter werden weitgehend aus **Tab. 3-15** übernommen. Abweichende Parameter sind in den Abbildungen gekennzeichnet. Zur Verdeutlichung sind einige ausgewählte Beispiele in **Abb. 3-50** und **Abb. 3-51** dargestellt.



**Abb. 3-50** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für sechsfache Wiederholung und verschiedene Strahlradien im Übergangsbereich;  $w_{0,\sigma,IFTA} = w_{0,\sigma,Abb} = w_{0,\sigma}$ ;  $N_{x,IFTA} = 2^7$ ;  $N_{x,Abb} = 2^{11}$ ;  $\Delta z = 25 \text{ mm}$ ;  $\Delta x_{DOE} = 4 \mu\text{m}$ ; restliche Parameter aus **Tab. 3-15**

Anhand der Darstellung in **Abb. 3-50** wird deutlich, dass eine Ausleuchtung von mehr Strukturen zu einer scheinbaren Verschlechterung des gesamten Bildes führt. Jede ausgeleuchtete Struktur erzeugt ihr eigenes Beugungsbild, wodurch in der Abbildungsebene eine Überlagerung der lateral verschobenen Bilder auftritt. Die dargestellten Beugungsbilder sind für den

Übergangsbereich zwischen Nah- und Fernfeld mit Linsenterm berechnet. Im Fernfeld werden die Strukturen wieder scharf, was in **Abb. 3-51** verdeutlicht ist. Der Grund ist, dass jedes Teilbild die gleiche Divergenz besitzt und somit das Verhältnis von lateraler Verschiebung zur Gesamtbildgröße mit zunehmender Entfernung abnimmt. Kleine Strukturen, wie der rechte Streifen von Teststruktur 1, können trotz der großen Entfernung verbreitert erscheinen. Die Verbreiterung ist abhängig vom Verhältnis von Strukturbreite zu lateraler Verschiebung.



**Abb. 3-51** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für zehnfache Wiederholung und

verschiedene Entfernungen;  $w_{0,\sigma,IFTA} = w_{0,\sigma,Abb} = 1$  mm;  $N_{x,IFTA} = 2^7$ ; von links:

$N_{x,Abb} = 2^{13}, 2^{14}, 2^{15}, 2^{15}$ ;  $\Delta x_{DOE} = 4$   $\mu$ m; ohne Linsenterm; restliche Parameter aus **Tab. 3-15**

Die durch Formel (3-47) abschätzbare Entfernung  $\Delta z_{Fern}$ , ab welcher die Beugungsstruktur sichtbar wird, behält für jedes Teilbild seine Gültigkeit. In welcher Entfernung sich die Abbildungsebene befinden muss, um auch bei der Beleuchtung mehrere Strukturen eine scharfe Abbildung zu erhalten, kann nicht allgemeingültig geklärt werden. Die Ursache ist der Einfluss der Struktur des Beugungsbildes selbst.



## 4 Simulation der Ausbreitung der Beugungsbilder

### 4.1 Simulation mit Hilfe von Grafikprozessoren

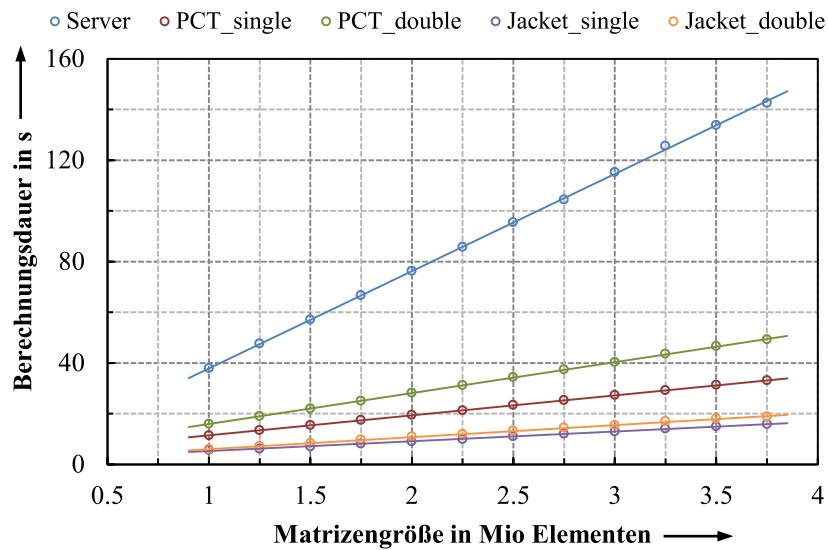
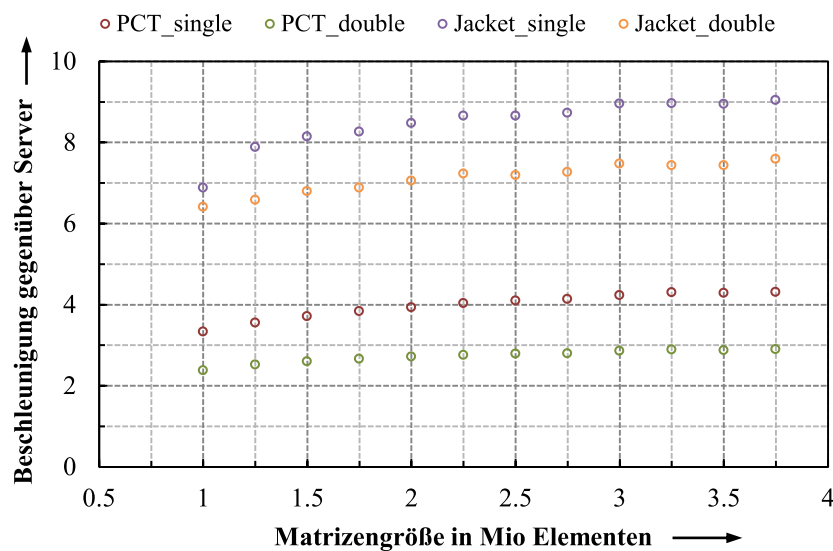
Die Abbildung der Beugungsbilder mittels realer Linsen ist unter Verwendung von Propagationsoperatoren auf Basis der FFT sehr aufwendig, da der Algorithmus für jede verschiedene  $z$ -Koordinate separat ausgeführt werden muss. Zusätzlich treten noch weitere Effekte, wie der Umklappprozess bei einer Begrenzung der Abbildungsfläche, auf. Aus diesem Grund ist für solche Anwendungsfälle auf die Verwendung des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals zurückzugreifen (vgl. [Olb2012]).

Da die Strukturen i. d. R. keine Rotationssymmetrie aufweisen, muss der Algorithmus für jedes Element der Abbildungsfläche ausgeführt werden, wodurch sich die Berechnungsdauer sehr stark verlängert. Die Berechnung wird zur Beschleunigung mit Hilfe von Grafikprozessoren durchgeführt. Bereits in den vorangegangenen Arbeiten konnte gezeigt werden, dass durch Nutzung der Grafikkarte, engl. GPU = Graphics Processing Unit, eine hohe Beschleunigung erzielt werden kann [Olb2011]. Zur Berechnung steht eine NVIDIA Tesla C2075 mit den in **Tab. 4-1** aufgelisteten Parametern zur Verfügung. Im Vorfeld wurde die Berechnungsdauer der Parallel Computing Toolbox (PCT) von MATLAB und der kostenpflichtigen MATLAB-Erweiterung JACKET der Firma AccerlerEyes mit dem in Vorarbeiten durchgeführten Test [Olb2011] ermittelt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 4-1** für Single- und Double-Precision dargestellt. Als Vergleich wird der ebenfalls bereits untersuchte Server mit einer Taktfrequenz von  $2 \times 6 \times 2,93$  GHz und einem Arbeitsspeicher von 96 GB verwendet.

**Tab. 4-1** Zusammenfassung der wichtigsten Parameter der Grafikkarte: NVIDIA Tesla C2075

<i>Prozessortakt</i> / GHz	<i>Stream-Prozessoren</i>	<i>Speichertakt-frequenz</i> / GHz	<i>Speicher</i> / GB	<i>Rechenleistung</i>	
				<i>Single-Precision</i> / Gflops	<i>Double-Precision</i> / Gflops
1,15	448	1,5	6	1030	515

Anhand der Darstellung in **Abb. 4-1** wird deutlich, dass die Erweiterung JACKET die Berechnung stärker beschleunigen kann als die Parallel Computing Toolbox. Daher wird in den nachfolgenden Berechnungen nur die Erweiterung JACKET verwendet. Weiterhin ist ein deutlicher Unterschied zwischen Single- und Double-Precision erkennbar, wobei für die Berechnung lediglich Double-Precision verwendet werden kann [Olb2011].

*Berechnungsdauer**Beschleunigung*

**Abb. 4-1** Darstellung der erhaltenen Ergebnisse der Berechnung mittels Grafikprozessor; oben: die Berechnungsdauer in Abhängigkeit der Größe der Matrizen der Abstrahlfläche mit linearer Regression; unten: die Beschleunigung der beiden Möglichkeiten zur GPU-Berechnung gegenüber dem Server

## 4.2 Abbildung mit einer Linse

Die berechneten Beugungsstrukturen ergeben, je nach Pixelgröße, erst in sehr großer Entfernung  $\Delta z$  nach (3-47) eine scharfe Abbildung. Daher kann, wie bereits im Kapitel 3.1 gezeigt wurde, ein Linsenterm zur Phasenverteilung des DOEs addiert werden, um eine Abbildung in kurzen

definierten Entfernungen zu erhalten. Die Abbildung wird aber nur in dieser definierten Entfernung scharf und selbst im Unendlichen würde sich keine scharfe Abbildung mehr ergeben. Eine Abbildung der Strukturen mittels Linsen ist vorzuziehen, da das DOE dadurch nicht beeinflusst wird.

Die folgenden Untersuchungen sollen zeigen, dass die schärfste Abbildung in der bildseitigen Brennebene der Sammellinse entsteht. Die Berechnungen werden zum einen durch Ersetzen einer Linse durch einen Linsenterm nach (3-3) mit der Brennweite  $f'$  in einer Ebene nach dem DOE und zum anderen für eine reale Linse durchgeführt. Für die letztere Berechnung müssen die Brennweite sowie die Lage der Hauptebenen nach den folgenden Gleichungen unter der Bedingung  $n = n' = 1$  bestimmt werden:

*gegenstands- und bildseitige Brennweite:*

$$f' = \frac{n_{Lin}}{n_L - 1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{n_{Lin} \cdot (R_2 - R_1) + d(n_{Lin} - 1)} = -f \quad (4-1)$$

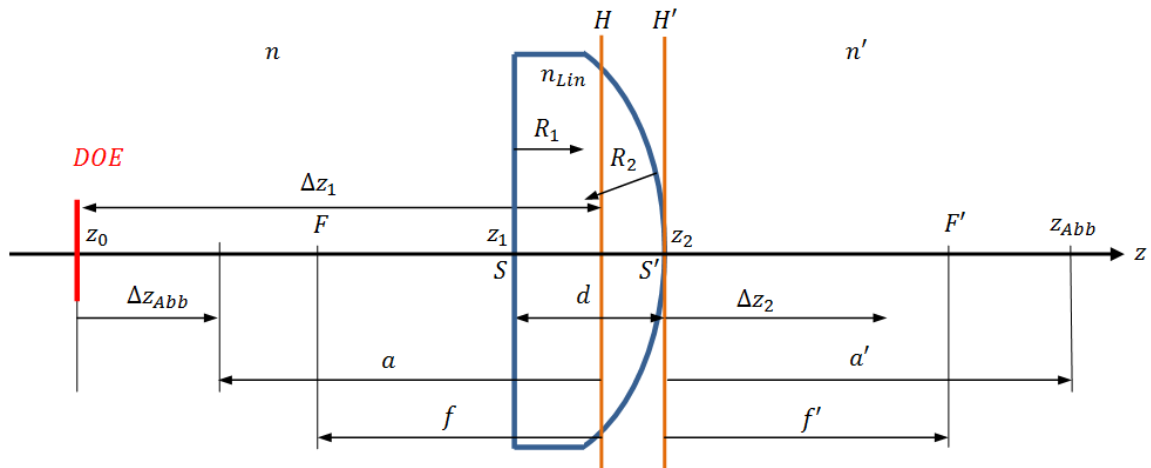
*Abstand gegenstandsseitiger Scheitelpunkt von der gegenstandsseitigen Hauptebene:*

$$\overline{SH} = -\frac{R_1 \cdot d}{n_{Lin} \cdot (R_2 - R_1) + d(n_{Lin} - 1)} \quad (4-2)$$

*Abstand bildseitiger Scheitelpunkt von der bildseitigen Hauptebene:*

$$\overline{S'H'} = -\frac{R_2 \cdot d}{n_{Lin} \cdot (R_2 - R_1) + d(n_{Lin} - 1)} \quad (4-3)$$

Zur Verdeutlichung sind die einzelnen Größen in **Abb. 4-2** dargestellt. Alle Größen, die in positiver  $z$ -Richtung gemessen werden, sind als positiv deklariert, in negativer  $z$ -Richtung entsprechend umgekehrt. Für die Simulation werden die Parameter aus Tabelle **Tab. 4-2** verwendet.



**Abb. 4-2** Visualisierung der Parameter in den Gleichungen (4-1) bis (4-3) sowie (4-12) und (4-13)

**Tab. 4-2** Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Abbildung in der Brennebene einer Linse

Parameter für IFTA und Abbildung mittels Fresnel-Näherung im Spektralraum:				
	DOE-Berechnung		Abbildung Fresnel spektral	
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT		Fresnel spektral	
Strahlprofil:	Gaußstrahl		Gaußstrahl	
	$w_{0,\sigma,IFTA} = 180\text{ }\mu\text{m}$		$w_{0,\sigma,Abb} = 180\text{ }\mu\text{m}$	
Wellenlänge $\lambda_0$ :	1 $\mu\text{m}$		1 $\mu\text{m}$	
Elementanzahl $N_x$ :	$2^6$		$2^7$	
Elementgröße $\Delta x$ :	15 $\mu\text{m}$		15 $\mu\text{m}$	
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich		$\Delta z_1 = 19,13\text{ mm}$ ; $\Delta z_2 = 20,87\text{ mm}$	
Iterationsschritte:	30		Linsenterm: nur auf 1. Grenzfläche $f' = 20,87\text{ mm}$	
Diskretisierungsstufen $p$ :	22			
Parameter für Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral:				
	Startfläche	1. Grenzfläche	2. Grenzfläche	Abbildungsfläche
z-Position:	-9,13 mm	10 mm	15 mm	34,13
Begrenzung $D_x$ :	Quadrat	Quadrat	Quadrat	Quadrat
	1,8 mm	1,8 mm	1,8 mm	1,8 mm
Flächentyp:	Ebene mit Phasenterm (DOE)	Sphäre $R = 20\text{ mm}$	Sphäre $R = -20\text{ mm}$	Ebene
Elementanzahl $N_x$ :	64	1832	340	602
Brechzahl $n$ :	1	1,5	1	1

Die Lage Abbildungsfläche wird nach (4-1) und (4-3) berechnet, damit sie sich in der bildseitigen Brennebene befindet. Die notwendigen Elementanzahlen für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral werden nach:

*Minimale Elementanzahl des Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral*

$$N_x \geq 2 \cdot \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot D_x(\Delta z) \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{D_x(\Delta z)}{\Delta z}\right)\right) + 1 \quad (4-4)$$

in Anlehnung an die Ergebnisse der Voruntersuchungen [Olb2012] bestimmt. Der Faktor 2 wird verwendet, da anderenfalls die entstehenden Speckle-Muster nicht hinreichend diskretisiert werden können. Die erhaltenen Beugungsbilder auf den verschiedenen Grenzflächen sind in **Abb. 4-3** für beide Propagationsoperatoren dargestellt.

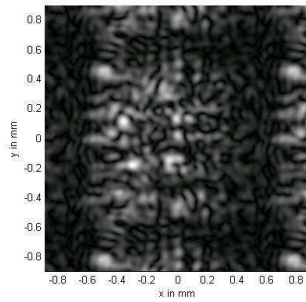


---

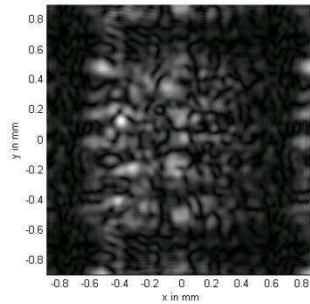
**Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral:**


---

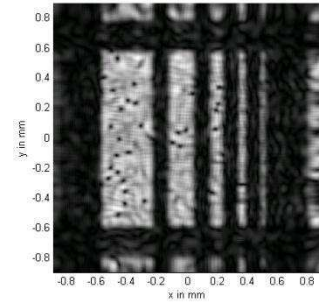
1. Grenzfläche



2. Grenzfläche



Abbildungsfläche

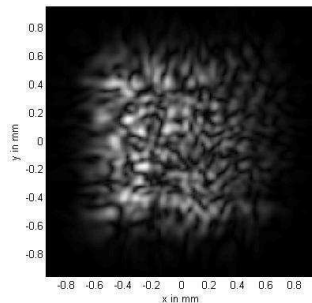



---

**Die Fresnel-Näherung im Spektralraum:**

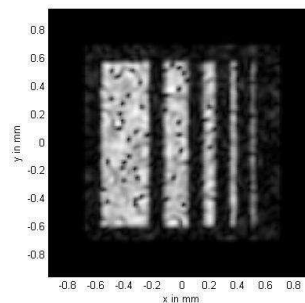

---

Linsenebene

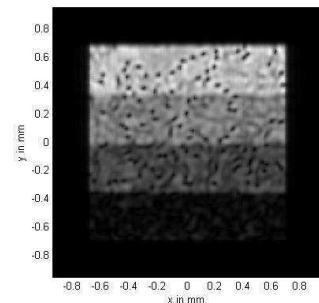


Abbildungsfläche

Teststruktur 1



Teststruktur 2

**Abb. 4-3** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder auf den verschiedenen Grenzflächen

**Abb. 4-3** zeigt, dass die Berechnung der Abbildung des Beugungsbildes durch eine Linse mit beiden Verfahren möglich ist. Die Anwendung eines Linsenterms erlaubt die Verwendung von Propagationsoperatoren auf Basis der FFT, wodurch sich die Berechnungsdauer von mehreren Stunden auf wenige Millisekunden bis Sekunden reduziert. Im gewählten Beispiel ist auf den Grenzflächen der Linse keine Struktur sichtbar. Der Grund ist, dass für eine Pixelgröße von  $\Delta x_{DOE} = 15 \mu\text{m}$  die Entfernung  $\Delta z_1 = 19,13 \text{ mm}$  nicht groß genug ist, damit sich die Linsenebene nach (3-47) im Fernfeld befindet. Weiterhin ist zu erkennen, dass das Bild in der Brennebene scharf wird. Das Bild ist aufrecht, was an der Abbildung von Teststruktur 2 sichtbar ist.

Die Größe des Bildes kann mit Hilfe der Matrixmethode bestimmt werden. Dazu werden zwei Translationsmatrizen und eine Matrix für die Linse benötigt. Die Linse wird als dünne Linse angenommen. Die Matrizen haben mit bereits eingesetzten Größen die Form [Ped2005]:

Strahlmatrix für eine dünne Linse

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \quad (4-5)$$

*Translationsmatrix  
vor der Linse*

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-6)$$

*Translationsmatrix  
nach der Linse*

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -f' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

Die Systemmatrix berechnet sich durch die Multiplikation der Matrizen (4-5) bis (4-7) jeweils von links.

*Systemmatrix*

$$S = T_2 \cdot L \cdot T_1 \quad (4-8)$$

Die Bildgröße wird in der technischen Optik mit  $y'$  bezeichnet und ist in diesem Zusammenhang mit der Größe  $x_{Min}$  gleichzusetzen. Mit Hilfe der Systemmatrix kann die Bildgröße  $y'_m$  der  $m = l$ -ten Ordnung über das Gleichungssystem:

*Gleichungssystem zur  
Berechnung der  
Bildgröße*

$$\begin{pmatrix} y'_m \\ \sigma'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -f' \\ \frac{1}{f'} & 1 - \frac{\Delta z_1}{f'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \sigma_m \end{pmatrix} \quad (4-9)$$

bestimmt werden. Für die Bildgröße ergibt sich schließlich mit:

*Gegenstandsseitiger  
Strahlwinkel zur  
optischen Achse*

$$\sigma_m = -\frac{(2 \cdot m - 1) \cdot \lambda_0}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} \quad (4-10)$$

die nachfolgende Form:

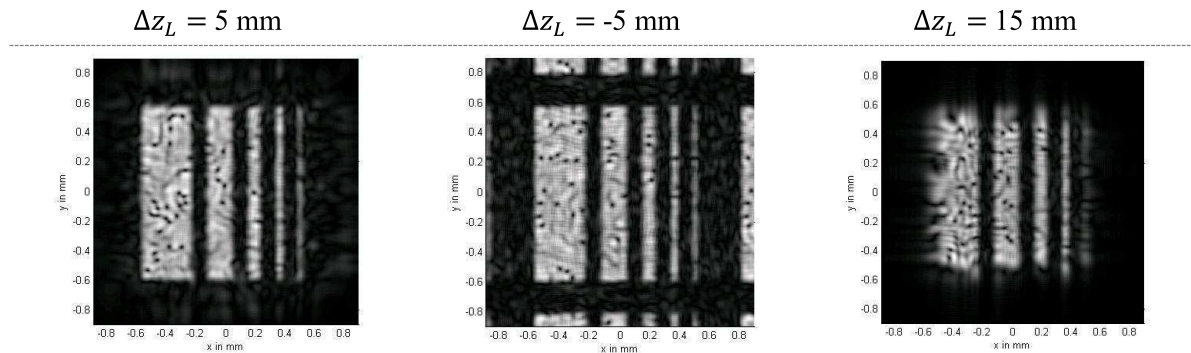
*Bildgröße in der  
gegenstandsseitigen  
Brennebene*

$$y'_m = \frac{(2 \cdot m - 1) \cdot \lambda_0 \cdot f'}{2 \cdot n_0 \cdot \Delta x_{DOE}} \quad (4-11)$$

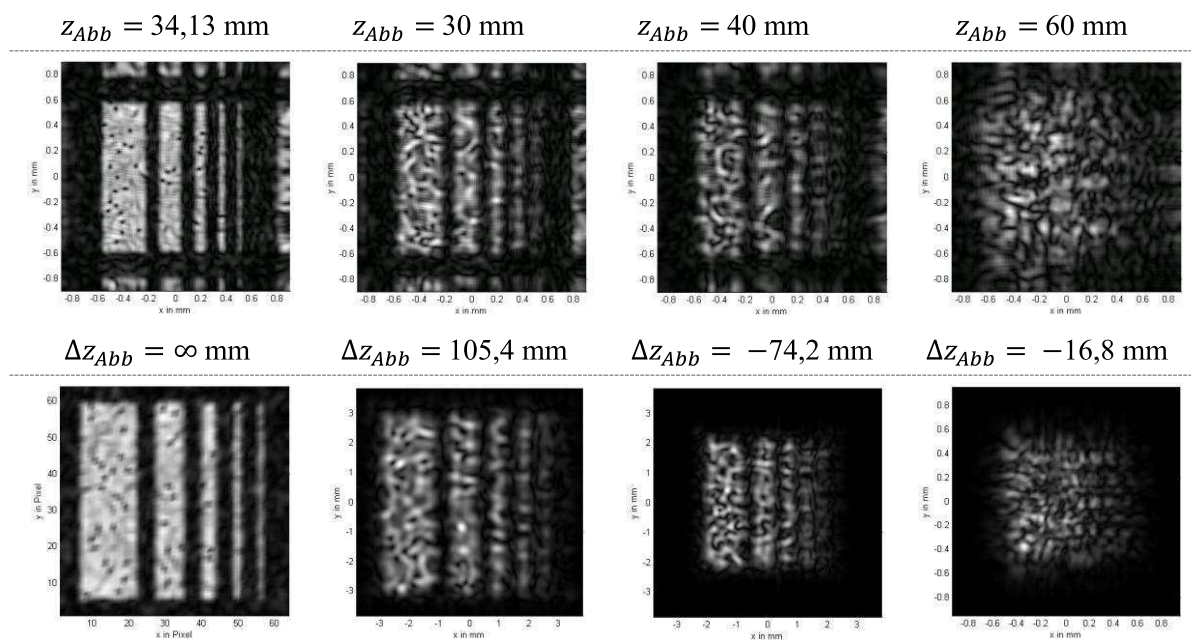
Die gesamte Größe des Bildes ist das Doppelte von (4-11). Nach (4-11) ist die Größe der Abbildung in der Brennebene konstant. Sie ist für ein festgelegtes DOE und konstante Strahlquelle nur von der bildseitigen Brennweite  $f'$  abhängig. Die Lage des DOEs vor der Linse spielt keine Rolle. Zur Verdeutlichung ist die Linse in **Abb. 4-4** um  $\Delta z_L$  verschoben.

Unabhängig von der Lage der Linse ergibt sich in **Abb. 4-4** keine Größenänderung der 0. Beugungsordnung und sie wird immer scharf abgebildet. Weiterhin wird deutlich, dass die Apertur der Linse groß genug sein muss. Anderenfalls findet eine Beschneidung der 0. Beugungsordnung bzw. der maximal gewünschten Ordnung statt. Die Abbildung zeigt, dass die höheren Ordnungen für  $\Delta z_L = -5$  mm im gewählten Ausschnitt deutlicher ausgeprägt sind. Die Ursache ist eine geringere Beschneidung der Nebenordnungen durch die Apertur als für  $\Delta z_L = 0$  mm. Bei einer Verschiebung um  $\Delta z_L = 5$  mm können keine höheren Ordnungen die Apertur passieren. Sie werden nicht in der Abbildungsebene sichtbar. Für  $\Delta z_L = 15$  mm ist die 0. Ordnung auf der Linse so groß ( $y'_{0,1,GF} = 1,14$  mm zu  $D_x/2 = 0,9$  mm), dass die Randbereiche beschnitten werden. Das vollständige Bild kann nicht mehr richtig abgebildet werden. Wie bereits

unter 3.4.3 beschrieben, sind die abgebildeten höheren Ordnungen Artefakte des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals. Dies ist an der nichtvorhandenen Modulation durch die Sinc-Funktion erkennbar. Ob vorhandene höhere Ordnungen oder nur die wiederholte 0.Ordnung zur Beschreibung der Beschneidung durch die Apertur verwendet werden, spielt keine Rolle.



**Abb. 4-4** Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in der Brennebene der Linse bei einer Verschiebung der Linse um  $\Delta z_L$ ; simuliert mit Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral; Parameter aus **Tab. 4-2**, 1. Grenzfläche bis Abbildungsfläche um  $\Delta z_L$  verschoben



**Abb. 4-5** oben: Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in verschiedenen Ebenen vor und nach der bildseitigen Brennebene simuliert mit Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral; Parameter aus **Tab. 4-2**, unten: Beugungsbilder in der zugeordneten Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  simuliert mit der Fresnel-Näherung im Spektralraum

In den Abbildungen **Abb. 4-3** und **Abb. 4-4** wird das Beugungsbild in der bildseitigen Brennebene betrachtet. Die weiteren Untersuchungen zeigen das Erscheinungsbild in einer Ebene,

die nicht der bildseitigen Brennebene entspricht. Einige ausgewählte Beispiele sind dazu in **Abb. 4-5** und **Abb. 4-7** veranschaulicht. Zur Simulation werden weitgehend die Parameter aus **Tab. 4-2** übernommen. Die konkreten Parameter sind der Abbildung ausgewiesen.

**Abb. 4-5** zeigt, dass das Bild am schärfsten in der Brennweite ist. Der Grund ist, dass jedes nach der Linse abgebildete Bild, einem Bild in einer definierten Entfernung vor der Linse zugeordnet werden kann. Das Beugungsbild muss in der zugeordneten Entfernung lediglich virtuell vorhanden sein. Diese Entfernung kann aus der Abbildungsgleichung:

$$\text{Abbildungsgleichung} \quad \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} \quad (4-12)$$

hergeleitet werden.  $\Delta z_1$  beschreibt den Abstand des DOEs von der gegenstandsseitigen Hauptebene der Linse. Er setzt sich in Anlehnung an **Abb. 4-2** aus zwei Teilen, der Gegenstandsweite  $a$  und der zugeordneten Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  des abzubildenden Beugungsbildes von der Position des DOEs, zusammen:

$$\begin{array}{l} \text{Abstand von} \\ \text{gegenstandsseitiger} \\ \text{Hauptebene} \end{array} \quad \Delta z_1 = \Delta z_{Abb} - a \quad (4-13)$$

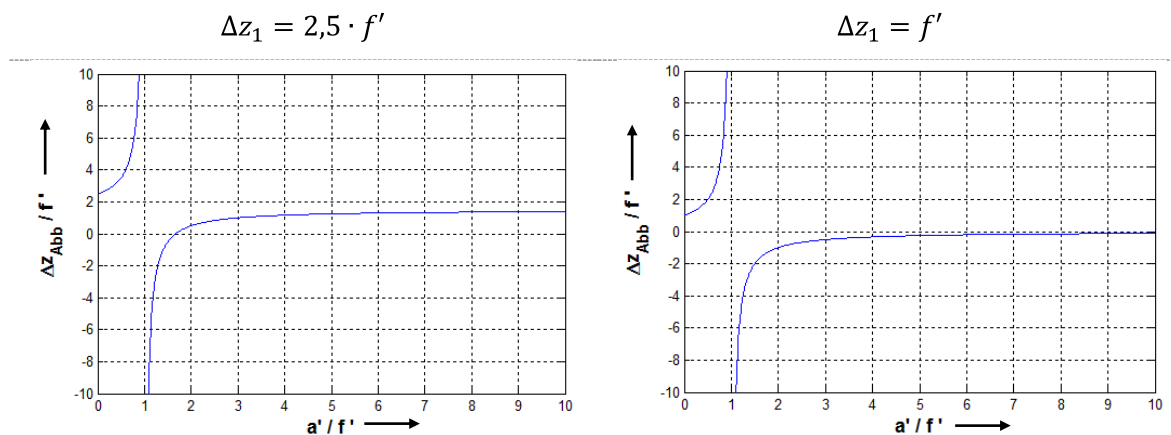
Der Abstand  $\Delta z_{Abb}$  bestimmt das Erscheinungsbild der Abbildung in den jeweiligen Ebenen nach der Linse. Das abzubildende Bild ist jenes, welches in der Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  vom DOE entsteht. Der Abstand kann auch negativ sein, was die Erscheinung des Bildes nicht ändert. Nur der Betrag der Entfernung übt einen Einfluss auf das Erscheinungsbild aus. Wird (4-12) zusammen mit (4-13) nach  $\Delta z_{Abb}$  umgestellt, ergibt sich:

$$\begin{array}{l} \text{zugeordnete} \\ \text{Abbildungsentfernung} \\ \Delta z_{Abb} \end{array} \quad \Delta z_{Abb} = \frac{f' \cdot a'}{f' - a'} + \Delta z_1 \quad (4-14)$$

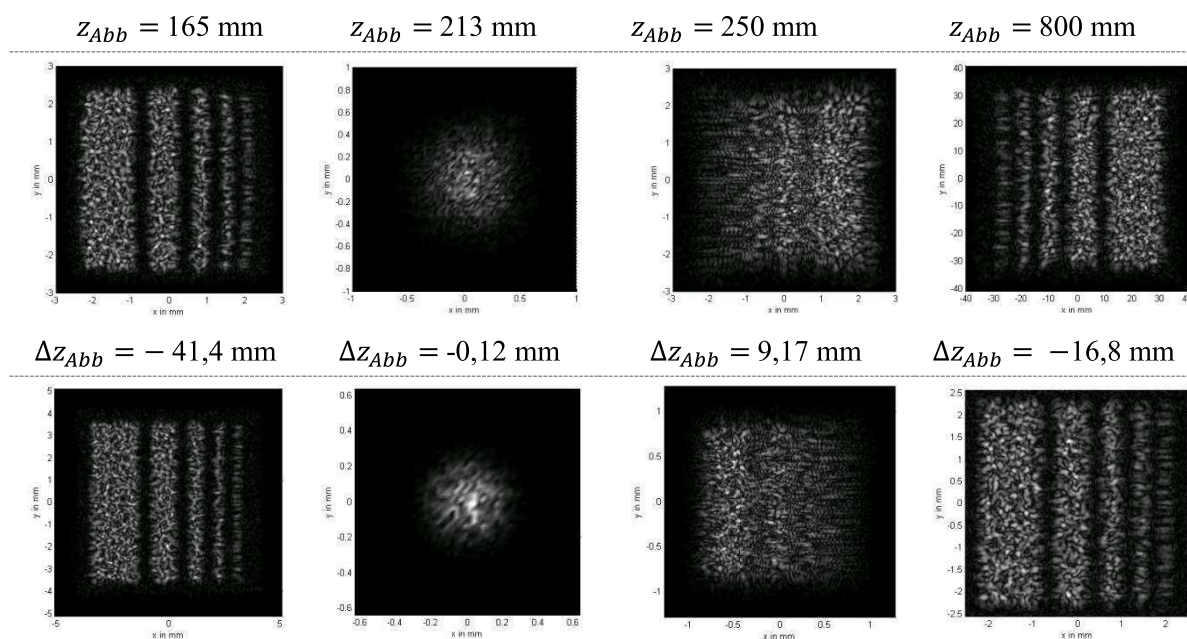
Zur Verdeutlichung der Abhängigkeiten  $\Delta z_{Abb}$  von dessen Parametern wurde der grafische Verlauf für zwei verschiedene Entfernungen  $\Delta z_1$  in **Abb. 4-6** dargestellt.

Die Darstellung zeigt, dass die Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  in der bildseitigen Brennebene für  $a' = f'$  gegen Unendlich strebt, vor der Brennebene gegen Minus-Unendlich und nach der Brennweite gegen Plus-Unendlich. Dadurch ist die scharfe Abbildung erklärbar, da das Beugungsbild im Unendlichen seine maximale Schärfe ausbildet. Für  $a' = 0$  wird das Bild auf der Linse dargestellt, d. h.  $\Delta z_{Abb} = \Delta z_1$ . Als Grenzwert  $\lim_{a' \rightarrow \infty} \Delta z_{Abb}$  ergibt sich:  $\Delta z_1 - f'$ , was ebenfalls in **Abb. 4-6** durch eine asymptotische Annäherung des Graphen an den Wert  $\Delta z_1 - f'$  sichtbar wird. Befindet sich das DOE in der gegenstandsseitigen Brennebene wird im Unendlichen kein Bild sichtbar, da  $\Delta z_{Abb}$  gegen 0 strebt. Das Strahlprofil auf dem DOE wird abgebildet. Aufgrund der zusätzlichen Phasenlage des DOEs enthält das Strahlprofil im Unendlichen auch Speckle-Muster. Zur Verdeutlichung und Beweis der Abhängigkeiten sind verschiedene Beugungsbilder nach der verwendeten Linse mit den berechneten Abbildungen in

den zugeordneten Entfernungen  $\Delta z_{Abb}$  in **Abb. 4-5** und in **Abb. 4-7** gegenüber gestellt. Die Beugungsbilder an der Position  $z_{Abb}$  haben aufgrund des Abbildungsmaßstabes eine andere Größe als in der Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  und sind mitunter umgekehrt und seitenvertauscht.



**Abb. 4-6** Darstellung der Abhängigkeit der Abbildungsentfernung  $\Delta z_{Abb}$  von  $a'$  für zwei verschiedene Entfernungen  $\Delta z_l$  des DOEs von der gegenstandsseitigen Hauptebene der Linse und normiert auf die bildseitige Brennweite



**Abb. 4-7** oben: Darstellung der erhaltenen Beugungsstrukturen in verschiedenen Ebenen nach der gegenstandsseitigen Brennebene für:  $f' = 50 \text{ mm}$ ;  $\Delta z_l = 80 \text{ mm}$ ;  $z_0 = 0 \text{ mm}$ ;  $\Delta x_{DOE} = 5 \mu\text{m}$ ;  $N_x = 2^{12}$ ; für  $z_{Abb} = 800 \text{ mm}$   $N_x = 2^{14}$ ; restliche Parameter aus **Tab. 4-2**; simuliert mit der Fresnel-Näherung im Spektralraum

**Abb. 4-5** und **Abb. 4-7** zeigen, dass die berechneten Bilder in der zugeordneten Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  den Bildern in der Entfernung  $z_{Abb}$  entsprechen. Formel (4-14) besitzt

Gültigkeit. Die Abbildungen in **Abb. 4-7** sehen einander ähnlicher als in **Abb. 4-5** was mit der Verwendung des gleichen Operators und der gleichen Pixelgröße in **Abb. 4-7** zu begründen ist. Weiterhin ist in **Abb. 4-7** für  $z_{Abb} = 165$  mm eine Tonnenverzeichnung sichtbar. Die Ursache ist die beginnende Fokussierung des Bildes. An der Position  $z_{Abb} = 213$  mm wird annähernd das Strahlprofil auf dem DOE mit Speckle-Mustern abgebildet. Die Ursache ist, dass die zugeordnete Entfernung fast 0 beträgt. Ab einer Position  $\Delta z_{Abb} = 0$  mm ist das Bild umgekehrt und seitenvertauscht.  $\Delta z_{Abb} = 0$  mm ist die Position mit der geringsten Bildgröße. Die Struktur wird nur sichtbar, wenn gilt  $\Delta z_{Abb} > \Delta z_{Fern}$ .

Im Weiteren soll eine Möglichkeit zur Berechnung bzw. Abschätzung der Bildgröße der 0. Ordnung nach der Linse erarbeitet werden. Für die höheren Ordnungen muss entsprechend der zusätzliche Faktor  $2 \cdot m + 1$  berücksichtigt werden. Auf die Angabe des Index  $m = 0$  wird verzichtet. Für die Berechnungen werden die Parameter von **Abb. 4-7** übernommen.

Die Bildgröße kann zum einen strahlenoptisch, an den verschiedenen Entfernungen  $\Delta z_2$ , vgl. **Abb. 4-2**, von der Linse, mit Hilfe der Matrixmethode abgeschätzt werden. Die Translationsmatrix nach der Linse hat die Form:

$$\begin{array}{l} \text{Translationsmatrix} \\ \text{nach der Linse} \end{array} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-15)$$

Zusammen mit (4-5) und (4-6) ergibt sich für die Bildgröße  $y'$  folgende Abhängigkeit:

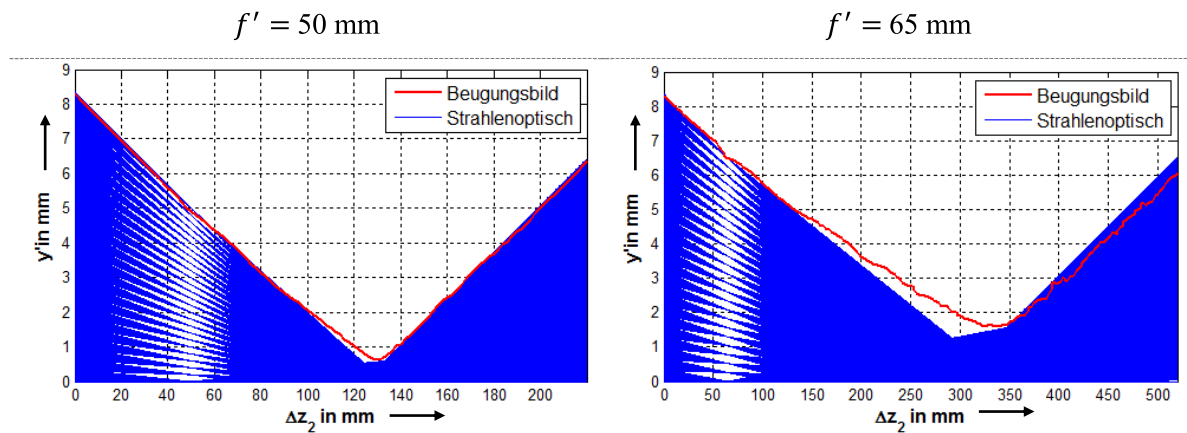
$$\begin{array}{l} \text{Abschätzung der} \\ \text{Bildgröße} \end{array} \quad y' = \sigma \cdot \left( \Delta z_1 \cdot \left( \frac{\Delta z_2}{f'} - 1 \right) - \Delta z_2 \right) - y_0 \cdot \left( \frac{\Delta z_2}{f'} - 1 \right) \quad (4-16)$$

Zur Abschätzung wurde  $y_0$  von 0 bis  $2 \cdot w_{0,\sigma,Abb}$  und  $\sigma$  von (4-10) bis 0 variiert. Die Ergebnisse sind in **Abb. 4-8** für zwei Beispiele zusammen mit den Abmessungen der mittels FFT berechneten Beugungsbildern (rot) veranschaulicht. Die Abmessungen der Beugungsbilder werden bestimmt, indem die  $x$ -Achse als Schnitt verwendet wird. Von der erhaltenen Verteilung wird das Maximum des Betrages der elektrischen Feldstärke bestimmt und anschließend der Wert gesucht, bei dem 1% des Maximums zum ersten Mal überschritten wird. Besonders für  $f' = 65$  mm ist eine Schwankung in den Abmessungen zu erkennen. Dies ist mit der statistischen Schwankung der berechneten Beugungsbilder aufgrund der im IFTA zufällig gewählten Anfangsphasenlage zu begründen. Die dargestellten Abmessungen der Beugungsbilder sind bereits das arithmetische Mittel von fünf Berechnungen.

Da die Berechnung und Darstellung für jeden Winkel und jede verschiedene Höhe sehr aufwendig ist, genügt die Berechnung für verschiedene Höhen mit dem maximalen Winkel  $\sigma$ . Anschließend erfolgt die Bestimmung des Maximums zu jeder  $z$ -Koordinate, was in **Abb. 4-9** zu sehen ist. Da die verwendeten Teilstrahlen keine Informationen über die Phasenlage und enthaltene Leistung tragen, ist die strahlenoptische Berechnung nur eine Abschätzung, die z. T.



erhebliche Abweichungen zur exakten Berechnung besitzt. Auch die Entfernung  $\Delta z_2$ , für die:  $\Delta z_{Abb} = 0$  mm gilt, wird nicht exakt gefunden.



**Abb. 4-8** Darstellung der strahlenoptisch berechneten Bildpunkte mit Variation von  $y_0$  und  $\sigma$  im Vergleich zur wellenoptisch berechneten Größe des Beugungsbildes

Eine weitere Möglichkeit der Abschätzung der Bildgröße kann durch Nutzung des Abbildungsmaßstabes erfolgen:

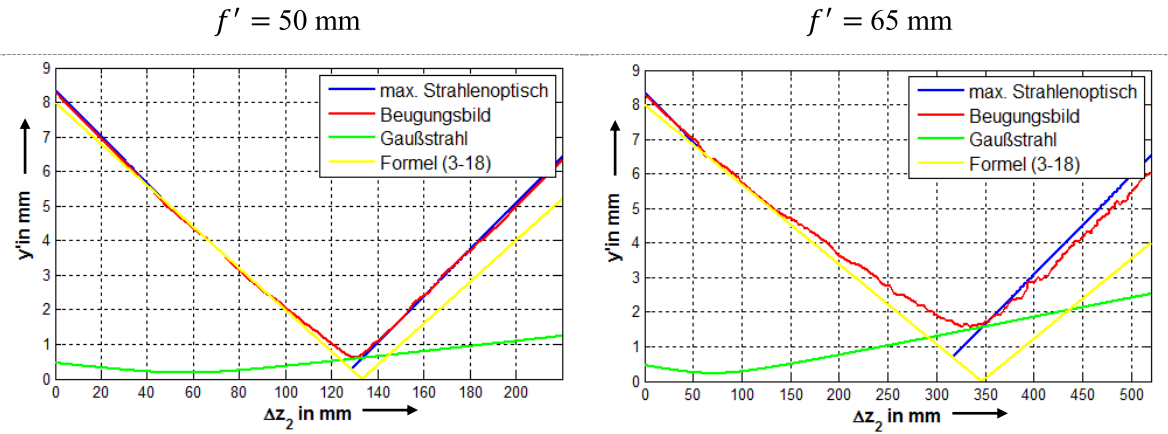
$$\text{Abbildungsmaßstab} \quad \beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad (4-17)$$

Die Gegenstandsweite  $a$  kann zusammen mit (4-12) durch die Variablen  $a'$  und  $f'$  ausgedrückt werden. Die Gegenstandsgröße  $y$  in der Entfernung  $\Delta z_{Abb}$  berechnet sich aus  $-\sigma \cdot \Delta z_{Abb}$ .  $\Delta z_{Abb}$  wird durch (4-14) beschrieben. Daraus folgt:

$$\text{Abschätzung der Bildgröße} \quad y' = \sigma \cdot \left( \Delta z_1 \cdot \left( \frac{a'}{f'} - 1 \right) - a' \right) \quad (4-18)$$

Gleichung (4-18) ist ein Spezialfall von (4-16) mit  $\Delta z_2 = a'$  und  $y_0 = 0$ . Die sich ergebenden Bildgrößen sind in **Abb. 4-9** (gelb) dargestellt. Die Ergebnisse weichen z. T. stark von den bestimmten Ausdehnungen ab. Jedoch ermöglicht (4-18) die korrekte Bestimmung von der Entfernung  $\Delta z_2$ , für die  $\Delta z_{Abb} = 0$  mm gilt. Dies ist der Punkt, an dem kein Beugungsbild sichtbar ist und die Teilstrahlen einander kreuzen.

$$\text{Position, an der kein Beugungsbild sichtbar ist} \quad a' = \frac{\Delta z_1 \cdot f'}{\Delta z_1 - f'} \quad (4-19)$$



**Abb. 4-9** Darstellung verschiedener Verfahren zur Abschätzung der Bildgröße: rot: aus den Beugungsbildern ermittelte Größe; blau: strahlenoptische Berechnung für verschiedene Gegenstandsgrößen mit dem maximalen Winkel  $\sigma$  und Bestimmung des Maximums aus den resultierenden Bildgrößen; gelb: Berechnung nach Formel (4-18); grün: Transformation des Gaußstrahles durch die Linse

An den Positionen an denen kein bzw. fast kein Beugungsbild sichtbar ist, wird der verwendete Gaußstrahl bzw. das Ausgangsstrahlprofil sichtbar. Dessen Größe kann ebenfalls mit Hilfe von (4-17) und der Bedingung  $y = w_{\sigma}(\Delta z_{Abb})$  bzw. nach den bereits daraus abgeleiteten Transformationsgleichungen für einen Laserstrahl durch eine Linse berechnet werden [Loes2009]:

Tailenradius nach  
einer Linse

$$w'_{0,\sigma} = w_{0,\sigma} \cdot f' \cdot \sqrt{\frac{1}{(\Delta z_1 - f')^2 + z_{R,\sigma}^2}} \quad (4-20)$$

Tailenposition nach  
einer Linse

$$z'_0 = f' + \frac{f'^2 \cdot (\Delta z_1 - f')}{(\Delta z_1 - f')^2 + z_{R,\sigma}^2} \quad (4-21)$$

Strahlradius nach  
einer Linse in  
Abhängigkeit von  $\Delta z_2$

$$w_{\sigma}(\Delta z_2) = w'_{0,\sigma} \cdot \sqrt{1 + \frac{(\Delta z_2 - z'_0)^2}{z_{R,\sigma}^2}} \quad (4-22)$$

Die Rayleigh-Länge wird nach (3-22) und nach der Linse entsprechend mit  $w'_{0,\sigma}$  statt  $w_{0,\sigma}$  berechnet. Der Verlauf der Größe des Gaußstrahles  $D_{Gauß}/2$  nach der Linse wurde auch in **Abb. 4-9** (grün) mit  $D_{Gauß}/2 = 2 \cdot w'_{\sigma}(\Delta z_2)$  dargestellt. Durch die Verdopplung wird sehr gut das gesamte Strahlprofil in einer Richtung erfasst und die elektrische Feldstärke ist für  $r = 2 \cdot w'_{\sigma}(\Delta z_2)$  annähernd auf 2% ihres Maximums abgefallen. Der Radius für den Abfall auf 2% des Maximums kann in guter Näherung der Ausdehnung, bei der das Maximum des Schnittes auf 1% abgefallen ist, gleich gesetzt werden. Die Ursache bilden die statistischen Schwankungen.



Anhand der Darstellungen ist zu erkennen, dass die minimale Größe der Beugungsbilder durch die Abmessungen des Gaußstrahls bestimmt wird.

### 4.3 Abbildung des Beugungsbildes aus der Brennebene

Das erhaltene Zwischenbild in der bildseitigen Brennebene der ersten Linse kann mit Hilfe einer zweiten Linse, mit der bildseitigen Brennweite  $f'_2$ , erneut abgebildet werden. Je nach Lage  $z_{L2}$  der zweiten Linse auf der optischen Achse kann die entstehende Abbildung vergrößert oder verkleinert erscheinen. Dieser Zusammenhang wird über den Abbildungsmaßstab (4-17) ausgedrückt. Zusammen mit der Abbildungsgleichung (4-12) kann die für einen bestimmten Abbildungsmaßstab bzw. eine gewünschte Bildgröße notwendige  $z$ -Position der zweiten Linse berechnet werden.

$$\begin{array}{l} z\text{-Position der zweiten} \\ \text{Linse} \end{array} \quad z_{L2} = z_{Abb} + f'_2 + \frac{f'_2}{\beta'} + \overline{SH} \quad (4-23)$$

Für die Operatoren mittels FFT, die einen Linsenterm nutzen, ist  $\overline{SH} = 0$  zu setzen. Zur Bestimmung der  $z$ -Koordinate der neuen Abbildung muss zur letzten  $z$ -Koordinate der zweiten Linse noch die Bildweite  $a'$  und der Abstand bildseitige Hauptebene zu bildseitigen Scheitelpunkt  $\overline{S'H'}$  addiert werden.

Die Ergebnisse für einen vorgegebenen Abbildungsmaßstab sind in **Abb. 4-10** dargestellt. Für die Berechnungen mittels Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral werden die Parameter aus **Tab. 4-2** mit den Parametern aus **Tab. 4-3** erweitert und die berechnete Abbildungsfläche aus **Abb. 4-3** als Startfläche verwendet. Für die Berechnung mit Hilfe der Fresnel-Näherung im Spektralraum wird das komplette System von Beginn an berechnet, da die Berechnung nur wenige Sekunden benötigt. Weiterhin muss auf der 1. Linse eine kubische Spline-Interpolation zur Halbierung der Elementgröße durchgeführt und auf der Zwischenebene eine Blende mit dem Radius  $R_{aper} = 1 \text{ mm}$  verwendet werden. Dies ist nötig um Berechnungsartefakte des Propagationsoperators weitgehend zu beseitigen. Sie sind in **Abb. 4-10** für Teststruktur 2 und  $\beta' = 0,5$  in den äußeren Bereichen noch leicht sichtbar. Die Artefakte konnten in den bisherigen Untersuchungen [Olb2012] nicht festgestellt werden und müssen Gegenstand weiterer Untersuchungen sein. Daher sollen sie in dieser Arbeit nicht weiter thematisiert werden.

**Tab. 4-3** Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der vom Abbildungsmaßstab abhängigen Abbildung

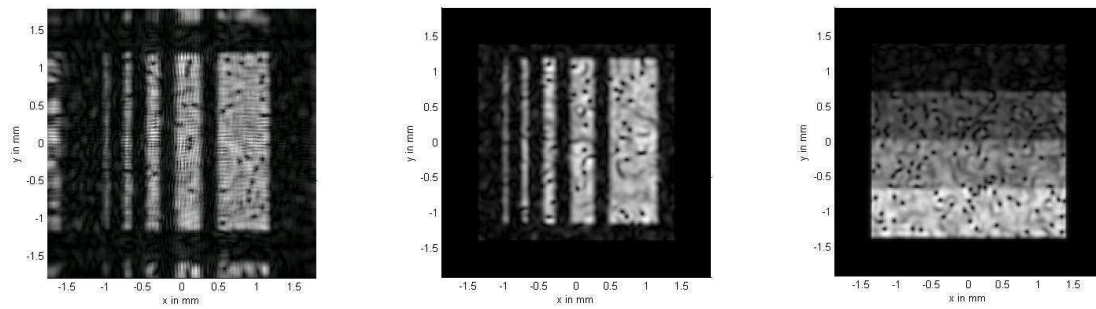
Parameter für Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral:					
	Startfläche	1. Grenzfläche	2. Grenzfläche	Abbildungsfläche	
z-Position:	34,13 mm	63,8 mm	68,7 mm	129,57	
Begrenzung $D_x$ :	Quadrat 1,8 mm	Quadrat 3 mm	Quadrat 3 mm	Quadrat 3,532 mm	
Flächentyp:	Ebene	Sphäre $R = 20$ mm	Sphäre $R = -20$ mm	Ebene	
Elementanzahl $N_x$ :	602	4634	298	602	
Brechzahl $n$ :	1	1,5	1	1	
Parameter für Fresnel-Näherung im Spektralraum:					
	Startfläche	1. Linse	Zwischen- ebene	2. Linse	Abbildungs- fläche
z-Position:	0 mm	20 mm	40,87 mm	72,175 mm	134,785
Element- größe $\Delta x$ :	15 $\mu\text{m}$	7,5 $\mu\text{m}$	7,5 $\mu\text{m}$	7,5 $\mu\text{m}$	7,5 $\mu\text{m}$
Phasenterm:	DOE	Linsenterm $f'_2 = 20,87$ mm	nein	Linsenterm $f'_2 = 20,87$ mm	nein
Element- anzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^9$	$2^9$	$2^9$	$2^9$

**Abb. 4-10** zeigt, dass eine Abbildung der Beugungsbilder und damit eine Größenänderung mit Hilfe von zwei Linsen möglich ist. Die theoretischen Bildgrößen und die Lage der Komponenten können nach den oben genannten Gesetzen der geometrischen Optik abgeschätzt werden. Beide Propagationsoperatoren liefern identische Ergebnisse. Die Abbildung der zweiten Linse ist umgekehrt, seitenvertauscht und je nach Abbildungsmaßstab vergrößert oder verkleinert. Auch in diesem Beispiel war die Berechnungsdauer mit Hilfe der Fast Fourier-Transformation mehrere Größenordnungen schneller als die Summation mittels Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral.

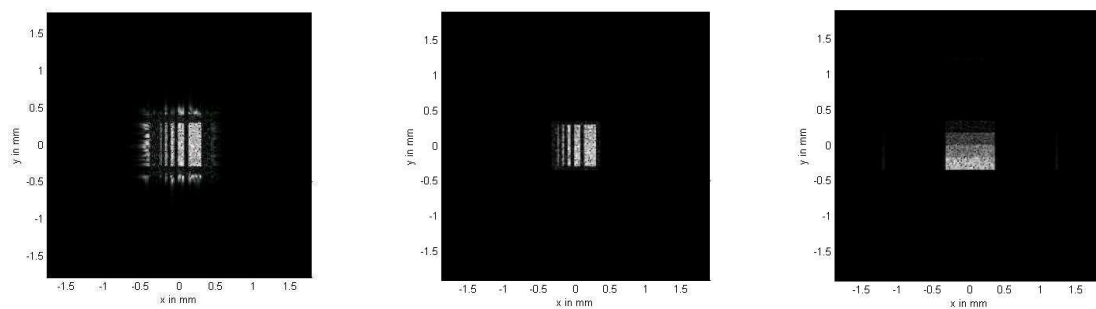
*Das Fresnel-Kirchhoffsche  
Beugungsintegral*

*Die Fresnel-Näherung im Spektralraum*

$$\beta' = 2$$



$$\beta' = 0,5$$




**Abb. 4-10** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder auf der Abbildungsfläche für zwei verschiedene Abbildungsmaßstäbe



## 5 Erzeugung von DOE mittels Strukturierung in Quarzglas

Für die Untersuchungen in diesem Kapitel wurde ein DOE mittels Fluorlaser-Strukturierung in einem Quarzglassubstrat erzeugt. Als Substrat diente das Quarzglas Corning 7980 der Firma CORNING INCORPORATED. Die Phasenverteilung für eine weitere Teststruktur, die eine Mischung aus den Teststrukturen 1 bis 3 darstellt, wurde berechnet. Die Parameter der Berechnung, sowie die abzubildende Teststruktur, sind in **Tab. 5-1** zu finden.

**Tab. 5-1** Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Phasenverteilung des zu erzeugenden DOEs sowie der abzubildenden Teststruktur

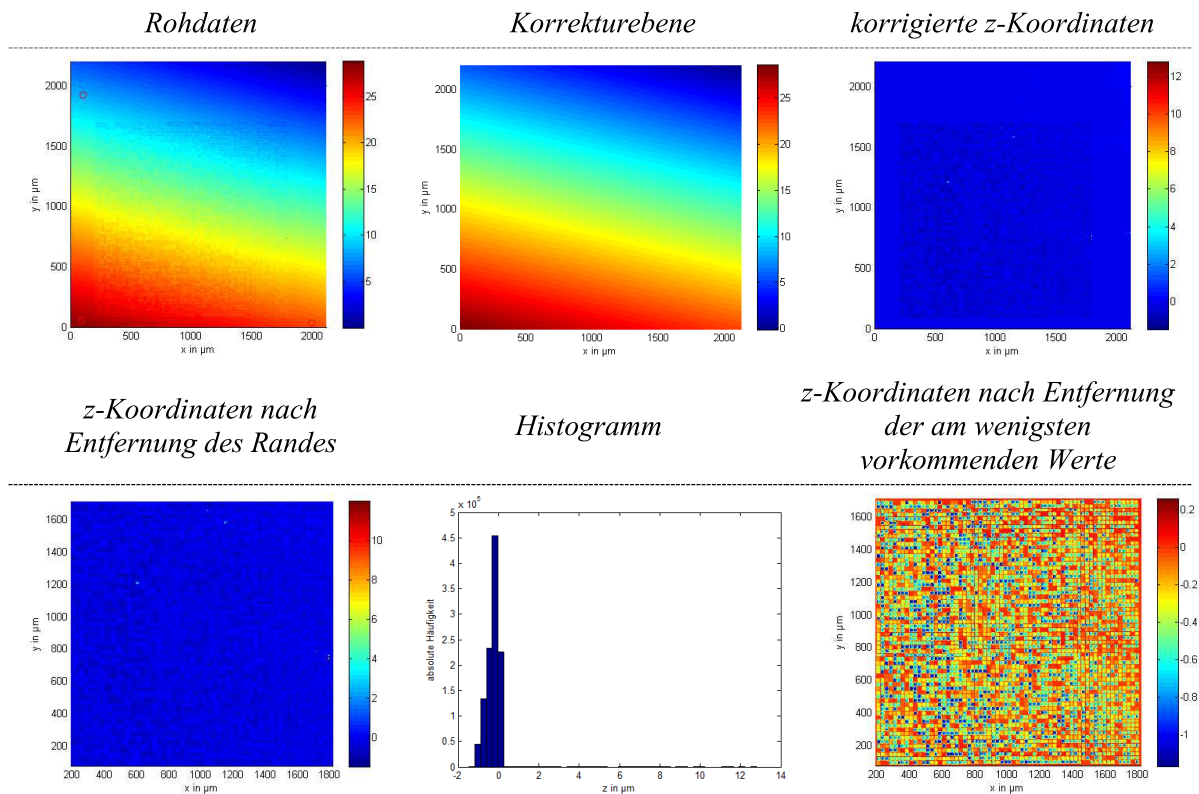
<i>DOE-Berechnung</i>		<i>Teststruktur 4</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	
Wellenlänge $\lambda_0$ :	532 nm	
Elementanzahl $N_x$ :	$2^6$	
Elementgröße $\Delta x$ :	$25 \mu\text{m}$	
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	
Iterationsschritte:	100	
Diskretisierungsstufen $p$ :	9	

Die berechnete Phasenverteilung wurde als Bitmap an die Kollegen des VIP-Projektes LAMIDIRE, Herrn Falko Jahn M.Sc. und Herrn Dipl. Ing. (FH) Michael Pfeifer übergeben. Sie setzten die berechnete Phasenverteilung in Befehle zur Lasersteuerung um. Zur Strukturierung wurde ein Fluorlaser der Wellenlänge  $\lambda = 157 \text{ nm}$  und einer Repetitionsrate von  $f_p = 200 \text{ Hz}$  verwendet. Auf der Materialoberfläche ergab sich eine Fluenz von  $H = 1,85 \text{ J/cm}^2$ . Mit diesen Parametern wird ein Abtrag von etwa  $60 \text{ nm/Puls}$  realisiert [Bert2009].

### 5.1 Ausmessung der erzeugten Strukturen und Übertragung in die Simulation

Die Ausmessung der Strukturen erfolgte auf zwei verschiedene Varianten, zum einen mittels Konfokal-Mikroskop der Firma NANOFOCUS und zum anderen mit einem Oberflächenprofilometer DEKTAK 3030 der Firma Sloan. Zur Übertragung in die Simulation ist die 1. Variante die geeignetste, weshalb auf sie auch verstärkt eingegangen wird.

Die Messung mittels Konfokal-Mikroskop erfolgte mit einem Objektiv, das eine Brennweite von 20 mm und eine numerische Apertur von 0,6 besitzt. Das Bild wurde aus neun Teilbildern zusammengesetzt, wodurch sich eine Auflösung von  $1380 \times 1376 \text{ Pixel}^2$  und ein Messfeld von  $2,155 \times 2,148 \text{ mm}^2$  ergab. Die laterale Auflösung beträgt  $1,56 \mu\text{m}$ . Bei einer vorgegebenen Pixelgröße von  $25 \mu\text{m}$  wurde ein Pixel 16 Mal in x- und y-Richtung abgetastet. Das DOE wurde ungereinigt und gereinigt ausgemessen.

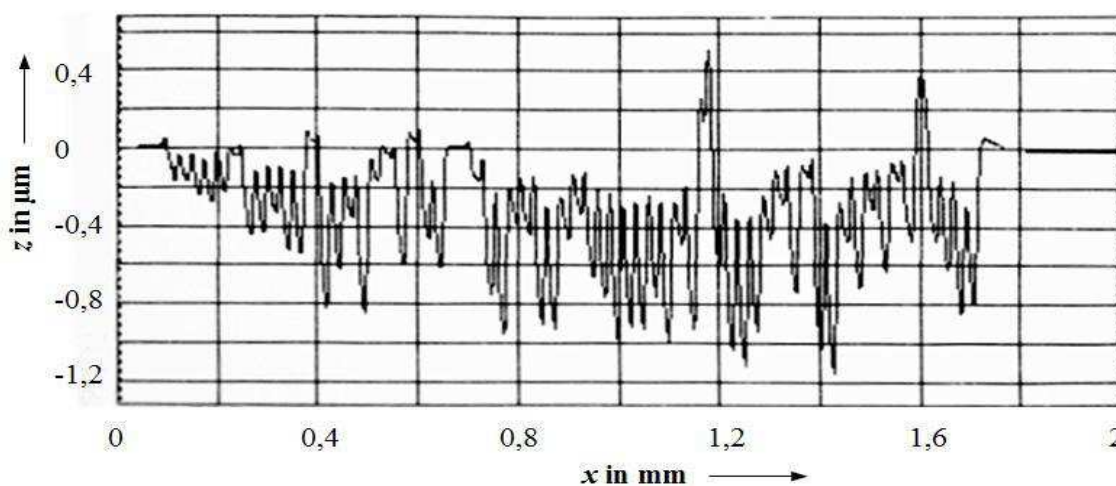


**Abb. 5-1** Darstellung der einzelnen Schritte zur Bearbeitung der exportierten Rohdaten für die Verwendung in der Simulation; alle Höhenangaben in  $\mu\text{m}$

Die ausgemessenen Rohdaten müssen in weiteren Schritten noch bearbeitet werden. Aufgrund der sehr hohen Tiefenauflösung werden bereits geringe Höhenunterschiede und Verkipnungen sichtbar. Aus diesem Grund und um dem Rand die z-Koordinate 0 zu zuordnen, muss die Höhenausrichtung mittels einer Korrekturebene verändert werden. Für die Ebene werden drei Punkte an jeweils drei verschiedenen Ecken des Randes bestimmt und aus diesen eine Ebenengleichung berechnet. Von den z-Koordinaten wird die Korrekturebene subtrahiert. Zur Vorstellung der einzelnen Bearbeitungsschritte sind diese in **Abb. 5-1** veranschaulicht. In einem weiteren Arbeitsschritt wird der Rand entfernt, um Rechenzeit in der nach der Bearbeitung folgenden Simulation einzusparen. Neben den Höhenstufen existieren auf der Probe noch Ablagerungen. Diese und u. a. Mehrfachreflexionen können Messfehler hervorrufen. Messfehler sind durch besonders große Messwerte sichtbar, die deutlich von den umliegenden Werten

abweichen. Zur Detektion der abweichenden Werte ist ein Histogramm sehr gut geeignet. Die stark abweichenden Werte besitzen die geringste absolute Häufigkeit. Ihnen wird der Wert 0 (Rand) zugeordnet. Sie sind dadurch entfernt.

Auffällig an den Messwerten ist, dass Bereiche existieren, die höher liegen als das umliegende Glassubstrat. Die Pixel werden durch Ablation jedoch nur in die Tiefe abgetragen. Die Erhöhung könnte mit Ablagerungen oder Materialveränderungen während des Ablationsprozesses begründet werden. Eine Vergleichsmessung mittels Oberflächenprofilometer kann ebenfalls eine Erhöhung einzelner Pixel zeigen, was in **Abb. 5-2** zu sehen ist.



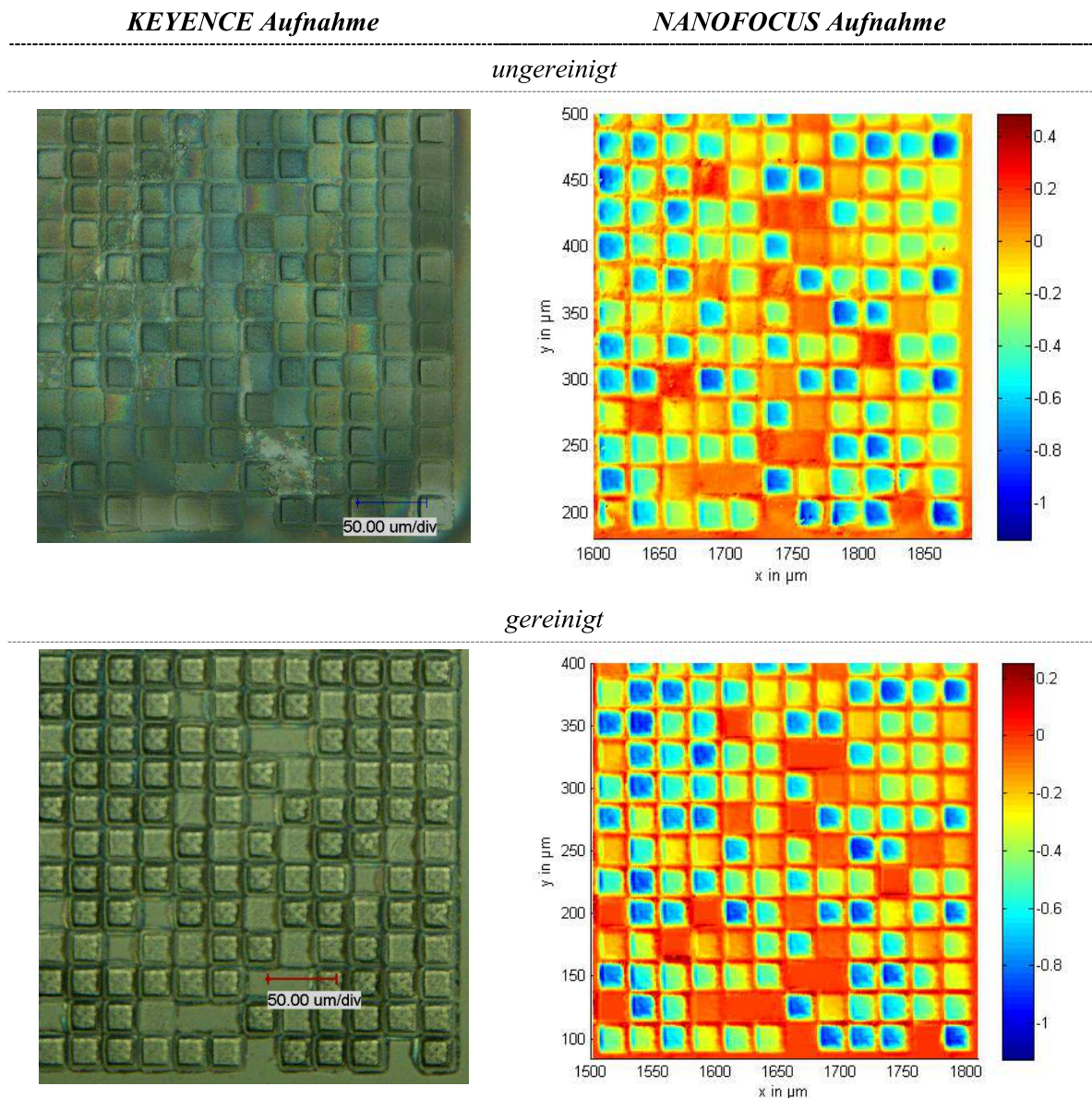
**Abb. 5-2** Darstellung des mittels Oberflächenprofilometer aufgenommene Profilansicht einer Zeile ohne Reinigung der Probe

Die Messungen mittels Konfokal-Mikroskop und Oberflächenprofilometer sind nicht direkt miteinander vergleichbar. Das Oberflächenprofilometer besitzt eine hohe laterale Auflösung, doch aufgrund des begrenzten Bildschirmbereiches und der Auflösung des Bildschirms kann die volle Auflösung bei einer Messstrecke von etwa 2 mm nicht angezeigt werden. Viele Messwerte gehen dadurch verloren. Eine komplette Zeile liefert kaum verwertbare Informationen. Eine Lösung wäre die schrittweise Abtastung einer Zeile, d. h. die Einteilung einer Zeile in mehrere Teilgebiete und Aufnahme des Oberflächenprofils jedes Teilgebiets. Dies würde den Messaufwand und die anschließende Bearbeitung erheblich erhöhen. Durch verschiedene Algorithmen müsste gewährleistet werden, dass die aufgenommenen Teilgebiete stetig aneinander gesetzt werden können. Das größte Problem der Messung ist, dass die Messwerte nicht digital übergeben werden können. Sie können nur als Diagramm ausgedruckt oder abfotografiert werden. Je nach Bildbearbeitungsverfahren würden sich wieder Verfälschungen der Messwerte ergeben. Daher sollen die Aufnahmen nur als Vergleichsmessung dienen. Sie werden nicht für die anschließende Simulation verwendet.



Die stark erhöhten Spitzen in der Aufnahme des Oberflächenprofilometers sind wahrscheinlich auf Verunreinigungen zurück zu führen. Weiterhin ist die gemessene Zeile nicht oder nur schwer in den Zeilen des Konfokal-Mikroskops auffindbar. Der Grund ist die unterschiedliche horizontale Ausrichtung, Unterschiede in der lateralen Auflösung sowie Messfehler beider Geräte.

Zur besseren Darstellung der Ergebnisse ist ein ausgewählter Bereich noch einmal vergrößert dargestellt und mit den Aufnahmen eines optischen Mikroskops der Firma KEYENCE in **Abb. 5-3** verglichen.



**Abb. 5-3** Vergleich der Aufnahmen von optischen – und Konfokal-Mikroskop; Höhenangaben in  $\mu\text{m}$



Die Abbildung zeigt, dass die Struktur sehr gut mit dem NANOFOCUS-Konfokal-Mikroskop bestimmt werden konnte. Bei der Betrachtung der erzeugten Struktur unterscheiden sich die beiden Aufnahmevarianten nur wenig. Die Falschfarbendarstellung der NANOFOCUS-Aufnahmen zeigt die bestimmten Höhenunterschiede relativ zum Glassubstrat. Solche Aussagen sind mit einfachen Mikroskop-Aufnahmen äußerst aufwendig.

Im ungereinigten Zustand sind Ablagerungen sichtbar. Daher ist eine Reinigung der Struktur nach dem Ablationsprozess notwendig. Diese erfolgte in einem verdünnten KOH-Bad – einmal 45 min mit einer Konzentration von 1,7 g/mol und das zweite Mal 30 min mit einer Konzentration von 3,4 g/mol. Durch die Reinigung konnten die Ablagerungen fast vollständig entfernt werden. Anhand der Ablagerungen ist die Richtung des Ablationsprozesses von links nach rechts erkennbar. Jeweils links von einem Pixel befinden sich verstärkt Ablagerungen und Materialveränderungen in einem kreisförmigen Bereich.

Weiterhin ist in **Abb. 5-3** die Pixelstruktur bei beiden Aufnahmen deutlich zu sehen. Der Abbildungsmaßstab bei der Maskenprojektion des Fluorlasers stimmt nicht exakt mit den Vorgaben überein, wodurch keine 25 µm großen Pixel erzeugt werden. Die Ursache ist wahrscheinlich ein defektes Objektiv. Die erzeugte Pixelgröße liegt in einem Bereich von etwa 20 bis 22 µm. Aufgrund des falschen Abbildungsmaßstabes entstehen zwischen den Pixeln einzelne Stege. Außerdem sind die Pixel nicht ideal quadratisch. An den Kanten entstehen Abrundungen und die Pixelform wirkt tonnenförmig verzeichnet. Die Auswirkungen der beschriebenen Störungen werden im nachfolgenden Unterkapitel untersucht.

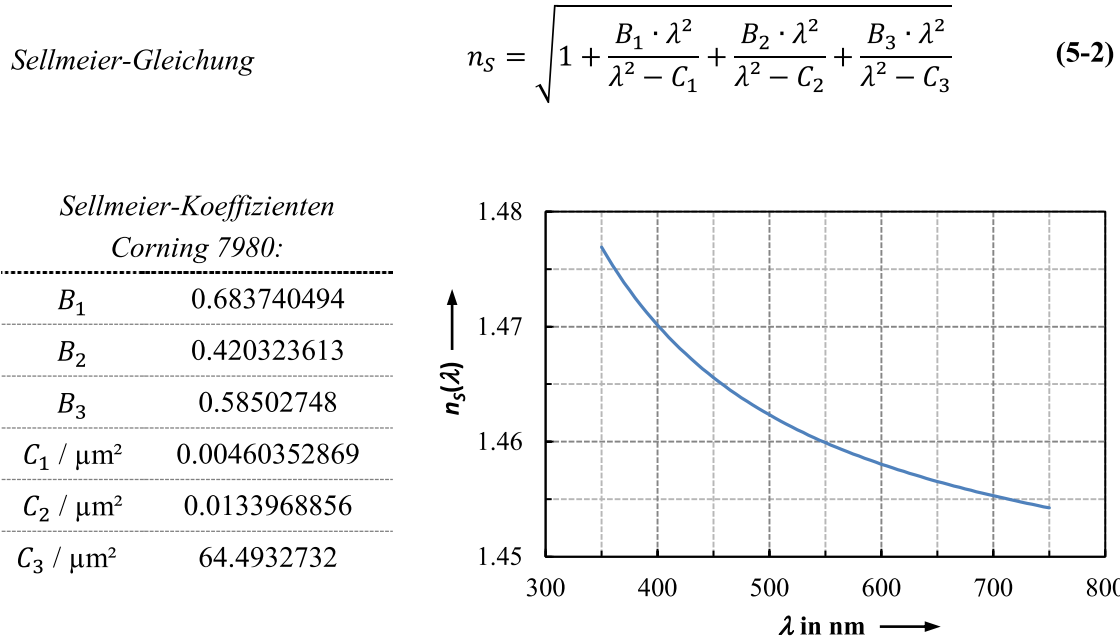
Nach der Bearbeitung der aufgenommenen  $z$ -Koordinaten werden sie zur Berechnung des Beugungsbildes in einer Abbildungsebene verwendet. Die Berechnung kann, wie bereits unter **4**, mit Hilfe eines Propagationoperators in Integralform oder auf Basis der FFT erfolgen. Für die exakte Berechnung muss der Strahlverlauf ab der Eintrittsfläche des Substrates bis zur strukturierten Rückseite und anschließend die Ausbreitung zur Abbildungsebene berechnet werden. Die komplette Berechnung besitzt mit dem Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral keine Einschränkungen, wobei die Berechnungsdauer den limitierenden Faktor darstellt. Die Wirkung der mittels Laserablation erzeugten Höhenunterschiede kann über die Beziehung:

*Phasenterm der  
Höhenunterschiede*

$$\varphi = k_0 \cdot (n_S - n_L) \cdot Z_{DOE} \quad (5-1)$$

in einen Phasenterm umgewandelt werden. Der Rechenaufwand reduziert sich damit erheblich, da nur die Berechnung zur Abbildungsfläche notwendig ist. Nach derselben Vorschrift wurde die berechnete Phasenverteilung in Höhenunterschiede zur Strukturierung umwandelt.  $n_S$  bezeichnet die Brechzahl des Substrates und  $n_L$  die Brechzahl der Luft. Für die Berechnungen werden die Brechzahlen als reell angenommen.  $n_S$  wird mit Hilfe der Sellmeier-Gleichung für das Substrat

Corning 7980 bei den genutzten Wellenlängen berechnet. Für Luft wird  $n_L = 1$  verwendet. Der Verlauf der Brechzahl  $n_s$  sowie die Sellmeier-Koeffizienten sind in **Abb. 5-4** zu finden.



**Abb. 5-4** Darstellung des Verlaufs der Brechzahl von Corning 7980 nach der Sellmeier-Gleichung, Sellmeier-Koeffizienten aus: [Cor2012]

Mit Hilfe des Phasenterms reduziert sich auch der Rechenaufwand bei Verwendung der Fresnel-Näherung im Spektralraum. Ohne Phasenterm müsste die Berechnung für jede z-Koordinate separat durchgeführt werden, wodurch sich die gesamte Berechnungsdauer um  $2 \cdot N_{z,DOE}$  erhöht. Die Fresnel-Näherung im Spektralraum hat den Nachteil, dass die zusätzliche Verwendung eines Linsenterms, aufgrund der identischen Ausdehnungen und Elementanzahlen von Abstrahl- und Abbildungsfläche, zwingend erforderlich ist. Ohne Linsenterm würde die gewünschte Struktur bei einer Wellenlänge von 532 nm und einer Pixelgröße von  $25 \mu\text{m}$  nach **(3-47)** etwa ab einer Entfernung von 800 mm scharf abgebildet werden. Eine Ordnung hätte in dieser Entfernung eine Größe von rund 17 mm. Da jedes Pixel 16 Mal abgetastet ist, können theoretisch bis zu 16 Ordnungen sichtbar werden. Damit erhöht sich die Gesamtbildgröße auf ca. 272 mm. Bei maximaler Ausnutzung des Arbeitsspeichers des Servers können aber nur  $2^{15}$  Elemente in einer Richtung und mit  $\Delta x = 1,56 \mu\text{m}$  etwa 51,1 mm Ausdehnung berechnet werden. Die Umklappprozesse [Olb2012] würden ein Beugungsbild liefern, welches nichts mehr mit dem eigentlichen Beugungsbild gemeinsam hat. Mit der Fresnel- und Fraunhofer-Näherung mittels FFT wäre auch nur eine maximale Entfernung von etwa 150 mm möglich. Somit kann die Abbildung nur in einer Ebene in kleiner Entfernung zur DOE-Ebene erfolgen.

Nach Formel (5-1) müssen Pixel, die eine Phasenänderung von  $\frac{8}{9} \cdot 2 \cdot \pi$  hervorrufen sollen, bei einer Wellenlänge von 532 nm einen Höhenunterschied von etwa 1  $\mu\text{m}$  aufweisen. Anhand der Darstellungen in **Abb. 5-2** und **Abb. 5-3** wird deutlich, dass dieser Wert annähernd im Vergleich zum Substrat (Höhe 0) erreicht wurde, jedoch auch tiefere Gebiete vorhanden sind.

## 5.2 Vergleich realer und simulierter Beugungsbilder

Im Weiteren sollen die real mittels Kamera aufgenommenen Bilder mit denen aus der Simulation verglichen werden. Zur Erzeugung der Beugungsbilder stehen drei verschiedene Laserquellen zur Verfügung: eine blaue Laserdiode, ein frequenzverdoppelter Nd: YAG Festkörperlaser, sowie ein He-Ne-Gaslaser. Die blaue Laserdiode und der frequenzverdoppelte Nd:YAG sind Laserpointer. Von den genannten Strahlquellen wird das Strahlprofil in der DOE-Ebene mit Hilfe der USB CMOS Monochrom-Kamera DMK 72BUC02 der Firma ImagingSource sowie das Spektrum mit Hilfe des Spektrometers HR4000 der Firma Ocean Optics bestimmt. Die Messung des Strahlprofils und Spektrums soll für eine möglichst hohe Übereinstimmung von Simulation und Realität sorgen. Zur Charakterisierung wird der Strahlradius auf Basis des 2. Moments nach DIN EN ISO 11146-1 [DIN2005], [Olb2011] verwendet:

$$\begin{array}{ll} \text{1. Moment bzw. Schwerpunkt in} & \langle x \rangle = \bar{x} = \frac{\iint x \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \\ \text{x-Richtung} & \end{array} \quad (5-3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{1. Moment bzw. Schwerpunkt in} & \langle y \rangle = \bar{y} = \frac{\iint y \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \\ \text{y-Richtung} & \end{array} \quad (5-4)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Leistungsbestimmung in} & P = \iint I(x, y, z) dx dy \\ \text{kartesischen Koordinaten} & \end{array} \quad (5-5)$$

$$\begin{array}{ll} \text{2. Moment in} & \langle x^2 \rangle = \sigma_x^2(z) = \frac{1}{P} \iint (x - \bar{x})^2 \cdot I(x, y, z) dx dy \\ \text{x-Richtung} & \end{array} \quad (5-6)$$

$$\begin{array}{ll} \text{2. Moment in} & \langle y^2 \rangle = \sigma_y^2(z) = \frac{1}{P} \iint (y - \bar{y})^2 \cdot I(x, y, z) dx dy \\ \text{y-Richtung} & \end{array} \quad (5-7)$$

$$\begin{array}{ll} \text{2. Moment in} & \langle xy \rangle = \sigma_{xy}(z) = \frac{1}{P} \iint (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) \cdot I(x, y, z) dx dy \\ \text{xy-Richtung} & \end{array} \quad (5-8)$$

Der dazugehörige Strahlradius ergibt sich aus:

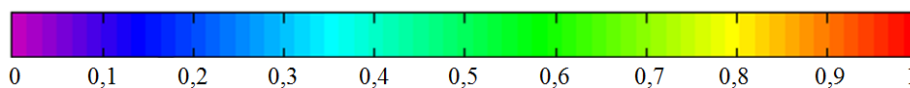
$$\begin{array}{l} \text{Strahlradius für} \\ \text{Hauptachse in} \\ \text{x-Richtung} \end{array} \quad w_{\sigma,x} = \sqrt{2 \cdot \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy}^2)^2} \right]} \quad (5-9)$$

$$\begin{array}{l} \text{Strahlradius für} \\ \text{Hauptachse in} \\ \text{y-Richtung} \end{array} \quad w_{\sigma,y} = \sqrt{2 \cdot \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy}^2)^2} \right]} \quad (5-10)$$

Auf die Bestimmung weiterer Strahlparameter, wie der Beugungsmaßzahl  $M^2$ , wird verzichtet. Im Vorfeld wird eine Glättung und Rauschminderung analog der Methoden in den Voruntersuchungen [Olb2011] durchgeführt. Vom Spektrum wird die Halbwertsbreite  $\lambda_{FWHM}$  sowie die Schwerpunktswellenlänge  $\bar{\lambda}$  analog zu Formel (5-3) berechnet. Die Spektrometeraufnahmen ergeben eine Bandbreite aller Laserquellen von etwa 1,6 nm. Eine Vergleichsmessung und Kalibrierung mit einer Natrium- und Quecksilberdampfampe liefert ebenfalls eine solch große Bandbreite. Die Spektrallinien der Vergleichsquellen sind nahezu monochromatisch. Daher ist die bestimmte Bandbreite zu vernachlässigen. Für die Schwerpunktswellenlänge ist die Genauigkeit ausreichend.

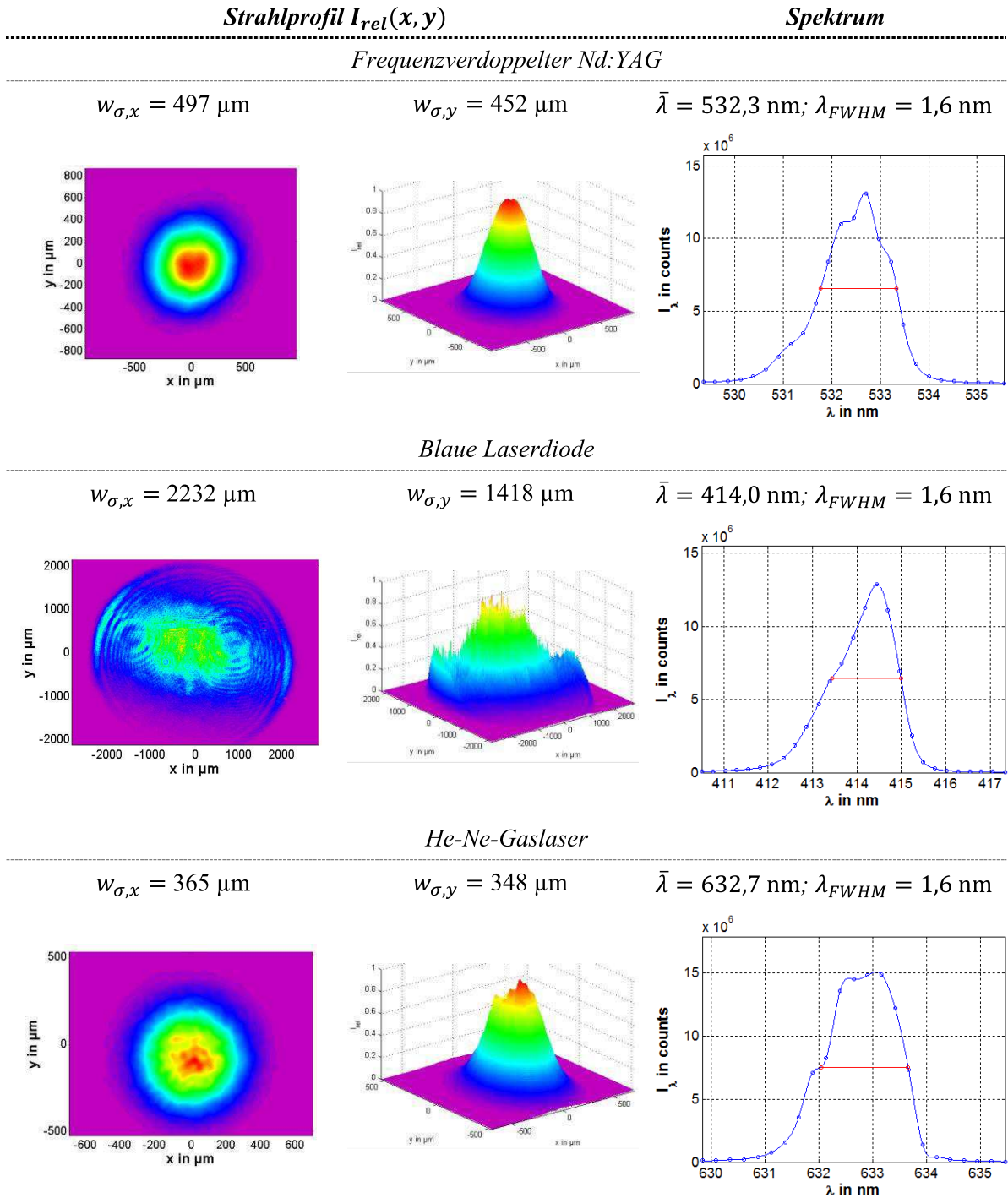
Zur vollständigen Übertragung des Strahlprofils wäre noch die Kenntnis der Phasenlage nötig. Diese kann mit einer einfachen Kamera nicht bestimmt werden. Ein Messgerät zur Bestimmung der Phasenlage ist ein Shack-Hartmann-Sensor, der für die Untersuchungen aber nicht zur Verfügung steht. Die Phasenlage wird daher als konstant angenommen.

Die Strahlprofile und Spektren sind in **Abb. 5-6** dargestellt. Aus Platzgründen wird auf die Angabe einer Colorbar verzichtet. Die relativen Intensitätswerte können der nachfolgenden Abbildung entnommen werden.



**Abb. 5-5** Colormap der nachfolgenden Abbildungen

Für die Kameraaufnahmen wird das Beugungsbild auf einer weißen Wand in einem abgedunkelten Raum abgebildet. Diese Abbildung wird mit der digitalen Spiegelreflexkamera E300 der Firma Olympus aufgenommen, d. h. das von der Wand zurück reflektierte bzw. gestreute Licht wird verwendet. Die Abbildung erfolgt nicht direkt auf dem Sensor. Sie kann nicht senkrecht erfolgen, da sich die Kamera ansonsten zwischen DOE und Wand befindet und einen Schatten werfen würde. Eine Justage der Positionen von Laserstrahl zu DOE wird durchgeführt und das Bild, welches optisch am besten wirkt, ausgewählt. Für die blaue Laserdiode ist eine Justage sehr schwierig. Das menschliche Auge ist kurzsichtig für blaues Licht [Schu2004].



**Abb. 5-6** Darstellung der gemessenen Strahlprofile und Spektren der drei verwendeten Laser

Die aufgenommenen Bilder weichen stark von dem mit den Augen sichtbaren Bild ab. Der Grund ist, dass eine Digitalkamera nur einen begrenzten Dynamikumfang bzw. Kontrast, d. h. Quotient aus größtem und kleinstem Helligkeitswert [Held2008], besitzt. Die meisten Kameras ermöglichen 24 Bit Farbtiefe, 8 Bit pro Kanal, für JPEG/TIFF-Formate bzw. 36 Bit für RAW-Formate. Einige Bildbereiche werden daher, je nach Blendenzahl und Belichtungszeit, auf dem Sensor über- oder unterbelichtet abgebildet. Bei der Aufnahme existieren zwei Möglichkeiten.

Entweder wird die 0. Ordnung mit der größten Helligkeit korrekt abgebildet und die Informationen über die dunkleren höheren Ordnungen gehen verloren oder die höheren Ordnungen werden korrekt abgebildet, aber die 0. Beugungsordnung wird stark überbelichtet. Einen Ausweg bilden HDR-Bilder, engl. High Dynamic Range, die bis zu 32 Bit Farbtiefe pro Kanal ermöglichen. HDR-Bilder kommen dadurch dem Eindruck des menschlichen Auges sehr nahe. Sie werden aus einer Bildserie von unter- bis überbelichteten Bildern berechnet [Held2008]. Für jede Laserquelle werden verschiedene Bilderserien aufgenommen und aus diesen die HDR-Bilder mit Hilfe der kostenlos verfügbaren Software LUMINANCE HDR berechnet. Die Kamera gibt für die blaue Laserdiode einen kräftigen Blauton statt eines violetten Farbtons wieder. Die Berechnung der HDR-Bilder ergibt für den frequenzverdoppelten Nd:YAG Laser einen matten Grünton und für den He-Ne-Laser eine Art Magenta. Die Bilder werden nachträglich so eingefärbt, dass die Farbe dem optischen Eindruck entspricht.

Für die Simulation werden die Parameter aus **Tab. 5-2** verwendet. Die Strahlprofile werden zur Simulation in der DOE-Ebene so ausgerichtet, dass der Schwerpunkt des Strahlprofils mit dem Koordinatenursprung des DOE übereinstimmt. Als Wellenlänge  $\lambda_{Abb}$  wird die Schwerpunktswellenlänge  $\bar{\lambda}$  verwendet. Eine Beschneidung (Clipping) der hohen Intensitäten bzw. Feldstärken um den Faktor  $g$  ist in den berechneten Beugungsbildern notwendig, d. h. höhere Werte als  $g \cdot I_{Max}$  werden auf den Wert  $g \cdot I_{Max}$  gesetzt. Anderenfalls wären die Beugungsordnungen, die von besonderem Interesse sind, kaum sichtbar. Die Bildgröße des simulierten Beugungsbildes wird auf 3 mm in  $x$ - und  $y$ -Richtung beschnitten. Das mittels Kamera aufgenommene Bild wird entsprechend den Ausschnitten angepasst, die sich im simulierten Bild ergeben. Da die beiden Bilder eine unterschiedliche Größe haben, wird auf die Angabe der absoluten Größe verzichtet. Ein relativer Vergleich im Erscheinungsbild ist nur noch möglich.

Die berechneten HDR-Bilder kommen zwar dem Eindruck des menschlichen Auges sehr nahe, zeigen jedoch Details, die mit einer linearen 8 Bit Colormap zur Darstellung der simulierten Beugungsbilder nicht nachgebildet werden können. Das menschliche Helligkeitsempfinden kann nach dem Weber-Fechner-Gesetz als logarithmisch bzw. durch eine Stevenssche Potenzfunktion beschrieben werden [Spe2008]. Beide Gesetze sind Postulate.

*Wegner-Fechner-  
Gesetz*

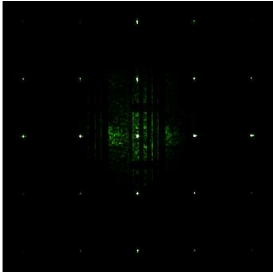
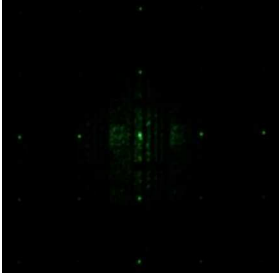
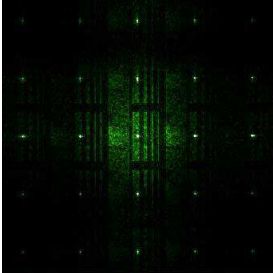
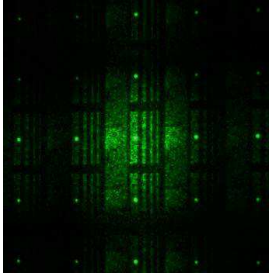
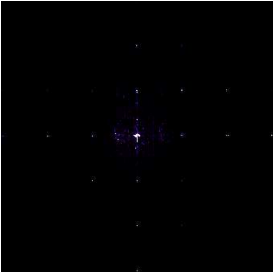
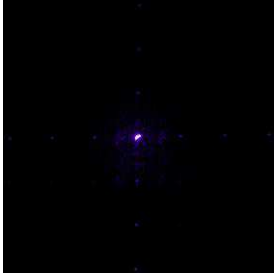
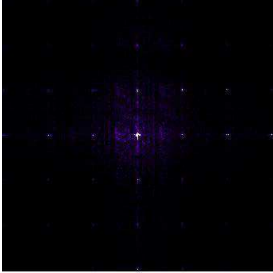
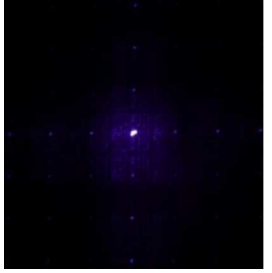

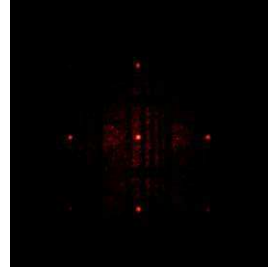
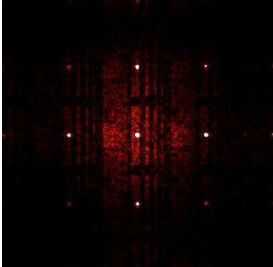
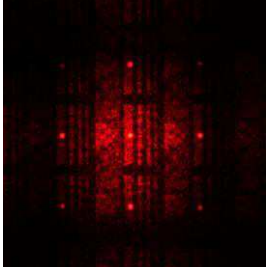
$$I = C \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad (5-11)$$

*Stevens-  
Potenzfunktion*

$$I = C \cdot (R - R_0)^n \quad (5-12)$$

Für das Helligkeitsempfinden kann  $n = 0,33$  angenommen werden [Has2006].  $R_0$  stellt die Schwellenreizstärke und  $R$  die Reizstärke dar. Die korrekte Nachbildung des Helligkeitseindrucks des Auges zur Darstellung ist sehr aufwendig. Eine einfache Nachbildung

nach den Gesetzen (5-11) oder (5-12) setzt die Kenntnis der Reizschwelle, der Reizstärke, deren Berechnung über die photometrischen Größen erfolgt, sowie der Konstanten  $C$  voraus. Daher wird an dieser Stelle darauf verzichtet und die simulierten Intensitäten des Beugungsbildes mit denen der Kamera verglichen. Die HDR-Bilder sind zur Veranschaulichung mit aufgeführt sowie die simulierte elektrische Feldstärke. Die Ergebnisse sind in **Abb. 5-7** zu finden.  $F$  bezeichnet in der Darstellung die Blendenzahl der Kamera,  $T_B$  die Belichtungsdauer und  $N$  die Anzahl der aufgenommenen Bilder für die HDR-Aufnahme.

$I_{rel,Sim}(x,y)$	$I_{rel,Kam}(x,y)$	$E_{rel,Sim}(x,y)$	<i>HDR-Aufnahme</i>
<i>Frequenzverdoppelter Nd:YAG</i>			
$g = 0,008$	$F = 13; T_B = 1/10 \text{ s}$	$g = 0,1$	$F = 13; N = 8$ $T_B = 1/10 - 2 \text{ s}$
			
<i>Blaue Laserdiode</i>			
$g = 0,0002$	$F = 11; T_B = 1/2 \text{ s}$	$g = 0,02$	$F = 11; N = 6$ $T_B = 1/10 - 1 \text{ s}$
			
<i>He-Ne-Gaslaser</i>			
$g = 0,008$	$F = 11; T_B = 1/5 \text{ s}$	$g = 0,1$	$F = 11; N = 10$ $T_B = 1/20 - 2 \text{ s}$
			

**Abb. 5-7** Bildlicher Vergleich der simulierten und mittels Kamera aufgenommener Beugungsbilder

**Tab. 5-2** Übersicht der verwendeten Parameter zur Berechnung der Beugungsbilder mit realen Strahlprofilen und Höhenunterschieden

<i>Abbildung</i>	
Propagationsoperator $P$ :	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Siehe <b>Abb. 5-6</b>
Wellenlänge $\lambda_0$ :	$\bar{\lambda}$ aus <b>Abb. 5-6</b>
Elementanzahl $N_x$ :	$2^{13}$
Elementgröße $\Delta x$ :	1,56 $\mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	30 mm
Linsenterm:	ja (kontinuierlich)

Die Darstellungen in **Abb. 5-7** zeigen, dass die simulierten Beugungsbilder sehr gut mit den aufgenommenen Beugungsbildern der Kamera übereinstimmen. Zur Darstellung der simulierten Beugungsbilder ist eine Beschneidung um den Faktor  $g$  notwendig. Inwieweit die Kameraaufnahmen beschnitten werden, konnte nicht ermittelt werden. Dass eine Beschneidung der aufgenommenen Intensität stattfindet, ist an der weißen Farbe der 0. Unterordnung in der 0. Ordnung zu erkennen. Die Beschneidung resultiert aus einer Übersteuerung des CCD-Chips. Die 0. Unterordnungen der höheren Ordnungen sind kaum beschnitten, wohingegen die höheren Ordnungen der simulierten Beugungsbilder deutlich beschnitten sind. Eine mögliche Ursache ist die unterschiedliche Art der Abbildung. In der Simulation ist das Beugungsbild direkt auf der Abbildungsebene dargestellt. Mit der Kamera wird nicht direkt abgebildet. Die Streu- und Reflexionseigenschaften der Wand, insbesondere deren Winkelabhängigkeit, sind nicht bekannt. Sie können die Ursache der Abweichungen darstellen.

Trotz der Unterschiede in der Aufnahme und Ausprägung der Maxima sind relative Aussagen über Gemeinsamkeiten möglich. Die 0. Beugungsordnung und jeweils die 0. Unterordnung weisen in der Simulation und im Kamerabild die höchste Intensität auf. In jeder Beugungsordnung wird die 0. Unterordnung sichtbar. Die Beugungsbilder des frequenzverdoppelten Nd:YAG und He-Ne-Lasers weisen scharfe Kanten und einen hohen Kontrast auf. Die Struktur ist deutlich sichtbar. Die Ursache ist das gaußähnliche Strahlprofil. Der frequenzverdoppelte Nd:YAG besitzt die zum designten DOE passende Wellenlänge, aber zu große Strahlabmessungen. Die Wellenlänge des He-Ne-Lasers weicht von der Vorgabe ab, wohingegen sein Strahlradius annähernd den Anforderungen entspricht. Die jeweiligen Abweichungen sorgen für eine Verschlechterung, wobei die Effekte relativ gering sind. Die Wellenlänge des He-Ne-Lasers ist größer als die Design-Wellenlänge. Wie unter **3.5.4** beschrieben wird, ist eine größere Wellenlänge weniger kritisch als eine kleinere. Der blaue Laserpointer erzeugt ein sehr schlechtes Beugungsbild. Dafür existieren mehrere Ursachen: die abweichende zu kleine Wellenlänge, das abweichende viel zu große Strahlprofil und die



unbekannte Phasenlage. Letztere hat gemäß den Untersuchungen **3.5.6** einen großen Einfluss. Auch eine laterale Verschiebung der Strahlquelle sorgt für eine Verschlechterung. Eine Verschiebung in der Simulation bringt keine sichtbaren Verbesserungen. Auf eine separate Darstellung wird verzichtet.

Die HDR-Aufnahmen geben den Eindruck des menschlichen Auges mit guter Näherung wieder. Die elektrische Feldstärke erzeugt einen ähnlichen Eindruck. Der Grund ist, dass die elektrische Feldstärke der Wurzel der Intensität direkt proportional ist und dadurch eine Potenzfunktion analog **(5-12)** mit dem Exponenten 0,5 statt 0,33 darstellt. Die beiden Funktionen sind sich in einem gewissen Bereich ähnlich.

Weiterhin sind die verwendeten Strahlquellen nicht streng monochromatisch. Nach **(3-10)** bzw. **(3-13)** erzeugt jede Wellenlänge ein unterschiedlich großes Beugungsbild. Die relative Größenänderung  $\Delta D_{rel}$  der 0. Ordnung kann für kleine Winkel über:

$$\begin{array}{l} \text{Relative} \\ \text{Größenänderung der} \\ \text{0. Beugungsordnung} \end{array} \quad \Delta D_{rel} = \frac{x_{Min}(\lambda_2) - x_{Min}(\lambda_1)}{x_{Min}(\bar{\lambda})} \cong \frac{\lambda_{FWDH}}{\bar{\lambda}} \quad (5-13)$$

abgeschätzt werden. Da  $\bar{\lambda} \gg \lambda_{FWDH}$  ist, insbesondere da die tatsächlichen Halbwertsbreiten wahrscheinlich viel geringer sind, kann dieser Einfluss vernachlässigt werden.

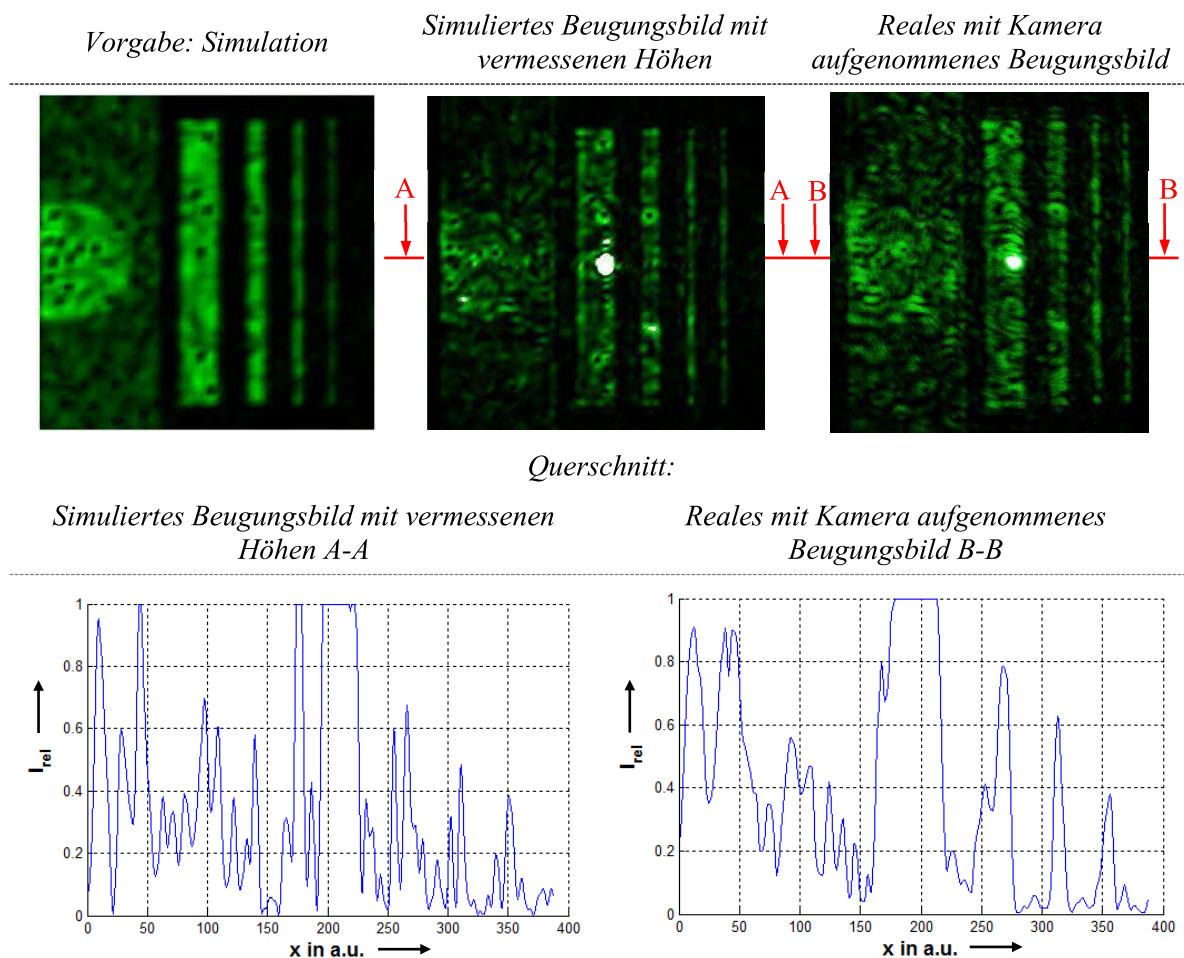
In den Simulationen und in den aufgenommenen Bildern konnte optisch kein Unterschied zwischen der gereinigten und ungereinigten DOE-Struktur festgestellt werden, weshalb auf eine zusätzliche Darstellung verzichtet wird.

**Abb. 5-7** zeigt, dass sich die Nullstellen der Sinc-Funktion nicht in der Mitte der Beugungsordnungen befinden. Ihr Abstand zum Koordinatenursprung ist vergrößert. Die Ursache könnte die geringere Pixelgröße aufgrund der Stege darstellen.

Abschließend sollen noch die 0. Ordnung des realen und simulierten Beugungsbildes mit der Vorgabe aus der Simulation verglichen werden. Im Vergleich werden nur die Bilder des grünen Lasers betrachtet, da dies mit der Vorgabe übereinstimmt. Die 0. Ordnung wird aus dem Gesamtbeugungsbild in voller Größe ausgeschnitten. Die zu vergleichenden Bilder sind in **Abb. 5-8** zu finden. Dargestellt sind die simulierte Intensität sowie ein aufgenommenes Kamerabild, d. h. keine HDR-Aufnahme. Weiterhin ist eine Schnittdarstellung entlang der x-Achse in der Abbildung veranschaulicht.

Die Darstellung verdeutlicht noch einmal, dass die vorgegebene Struktur mit guter Näherung erzeugt werden konnte. Die Nullstellen des Wellenfeldes befinden sich in jeder Abbildung an den gleichen Positionen. Die gewünschte Struktur ist sehr gut erkennbar, jedoch existieren Abweichungen. Die realen Strukturen, d. h. Simulation und Kameraaufnahme, weisen beide höhere Fluktuationen und eine geringere Homogenität auf. Die Abweichungen resultieren aus einem abweichenden Strahlprofil, einer abweichenden Phasenlage und Herstellungsungenauigkeiten. Im simulierten Beugungsbild ist die bereits unter **3.5.2**

beschriebene Sinc-Funktion in der Mitte der 0. Ordnung zu sehen. Sie wird sichtbar, da das DOE zu klein für den Strahlradius ist und somit Beugungseffekte hervorruft. Beim realen Bild ist sie hingegen nicht sichtbar, jedoch ist eine Schar von konzentrisch von der 0. Ordnung ausgehenden Ringen besonders auffällig. Die Ringe stellen wahrscheinlich Beugungseffekte dar. Sie sind ein typisches Beugungsbild von Staubkörnern bzw. Ablagerungen. Diese können sich auf der DOE-Struktur, aber auch am Laserausgang befinden. Die unbekannte Phasenlage des Strahlprofils könnte die Erscheinungen ebenfalls hervorrufen.



**Abb. 5-8** Darstellung der 0. Beugungsordnung des simulieren und real aufgenommenen Beugungsbildes im Vergleich zur Vorgabe

Aufgrund des zu großen Strahlradius entstehen die unter 3.5.2 beschriebenen kleinen Ringe mit hoher Intensität in den Strukturen. Diese sind im realen und simulierten Beugungsbild sichtbar. Sie befinden sich an den gleichen Positionen. Eine Verifizierung der Simulationsergebnisse ist dadurch erfolgt. Die hohe Übereinstimmung ist mit der Aufnahme des Strahlprofils und der exakten Übertragung des Höhenprofils zu begründen. Auch das Speckle-Muster ist nahezu identisch.

Weiterhin ist ersichtlich, dass die Kreisstruktur am linken Rand in der Simulation mit realen Höhen und im Beugungsbild nicht gut zu sehen ist und wenig zur Geltung kommt. Die Unterschiede zur Umgebung sind gering und zusätzlich beeinflussen die Speckle-Muster die Wahrnehmung. Die Streifen zeichnen sich durch hohen Kontrast aus und unterscheiden sich deutlich vom Untergrund.

Durch Betrachtung des Querschnitts wird deutlich, dass sich die beiden Schnitte ähnlich sind. Die verschiedenen Peaks befinden sich annähernd an den gleichen Positionen. Der Schnitt des realen Beugungsbild wirkt im Gegensatz zum Schnitt des simulierten Bildes geglättet. Mögliche Ursachen sind das Streuverhalten der Wand, sowie die Integration durch den CCD-Chip. Das simulierte Beugungsbild wird auch durch Messfehler bei der Bestimmung der DOE-Struktur, sowie des verwendeten Strahlprofils und numerische Fehler beeinflusst.

### 5.3 Probleme bei der Herstellung von DOE-Strukturen

Die bisher erzeugten Strukturen entsprechen noch nicht den Erwartungen, da die praktisch erhaltenen Beugungsbilder von den Vorgaben abweichen. Neben den abweichenden Strahlprofilen enthält die DOE-Struktur selbst Fehler. Deren Einfluss soll in diesem Unterkapitel untersucht werden.

#### 5.3.1 Leistungsschwankungen

Die Strukturierung erfolgt mittels Fluorlaser. Ein Fluorlaser ist ein Excimerlaser bei welchem durch elektrische Entladungen sogenannte Excimere gebildet werden. In der verwendeten Laseranlage kommt eine Hochspannung von maximal 26 kV zum Einsatz. Eine Anregung mit konstanter Spannung während des Bearbeitungsprozesses führt zu einer „Alterung“ des Prozessgases [Bert2009], wodurch sich die Pulsenergie verringert. Zum Ausgleich kann die Spannung nachgeregelt werden, um die Pulsenergie konstant zu halten. Diese Betriebsart wird als energiestabilsierter Modus bezeichnet. Wird die Spannung nicht oder nur unzureichend nachgeregelt, ergeben sich Strukturen, wie in **Abb. 5-9**. Das hergestellte DOE (vgl. **Abb. 5-3**) weist dem äußeren Anschein nach keine bis nur schwache Schwankungen auf. Wie groß der Einfluss der Energie- und damit auch der Leistungsschwankungen auf das Beugungsbild ist, sollen die nachfolgenden Untersuchungen klären.

Zur Nachbildung der Leistungsschwankungen werden Zufallszahlen zwischen 0 und 1 aller 16, 32, 64 und 128 Elemente erzeugt. Mittels kubischer Spline-Interpolation wird die Schwankung für die weiteren Elemente nachgebildet. Dadurch schwankt die Leistung nur langsam und nicht abrupt. Zur Verdeutlichung ist jeweils ein Beispiel für 32 und 64 Elemente in

**Abb. 5-10** dargestellt. Von den Schwankungen sollen nur Zeilen und diese unabhängig voneinander betroffen sein, da der Ablationsprozess ebenfalls zeilenweise erfolgt. Die Unabhängigkeit soll die Nachregelung der Hochspannung darstellen.

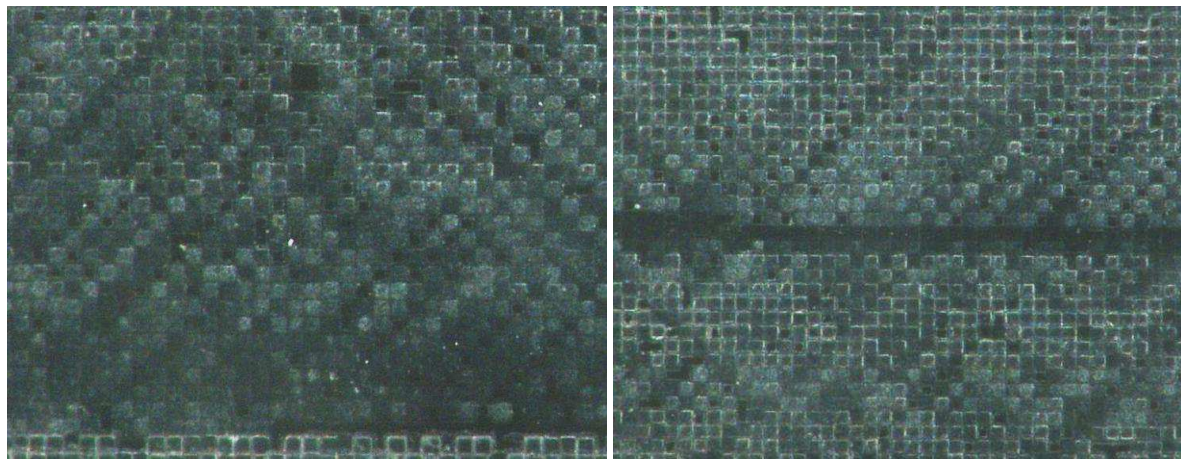
Für die Berechnungen wird eine relative Leistungsschwankung von maximal  $\pm P_{S,Max,rel}$  angenommen. Die Schwankung soll die Phasenlage um den gleichen relativen Wert ändern. Die Phasenlage mit Schwankungen  $\varphi_S$  ergibt sich aus:

$$\text{Phasenlage mit Schwankungen} \quad \varphi_S = \varphi \cdot (1 - P_{S,Max,rel} + 2 \cdot P_{S,Max,rel} \cdot \text{spline}(\text{random})) \quad (5-14)$$

$\text{spline}(\text{random})$  steht für die durch kubische Spline-Interpolation erzeugte Leistungsschwankung mit Hilfe der zufälligen Schwankung an den Stützstellen ( $\text{random}$ ). Die maximale Schwankung muss zunächst von 1 abgezogen werden, da die Zufallszahlen zwischen 0 und 1 liegen.

*Leistungsschwankungen*

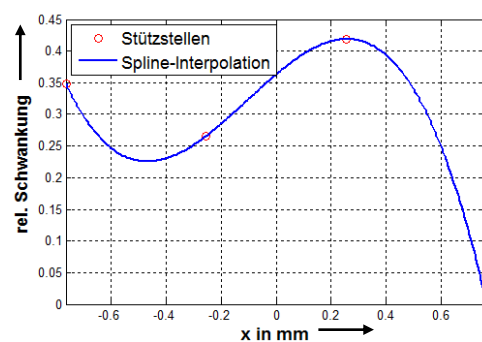
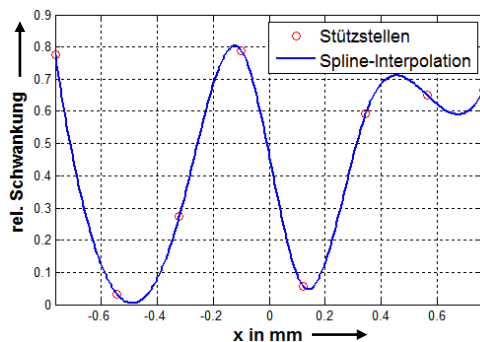
*Leistungsschwankungen und keine Strukturierung in 2 Zeilen*



**Abb. 5-9** Beispielhafte Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit Leistungsschwankungen;  $\Delta x_{DOE} = 25 \mu\text{m}$ ; 200fache Vergrößerung

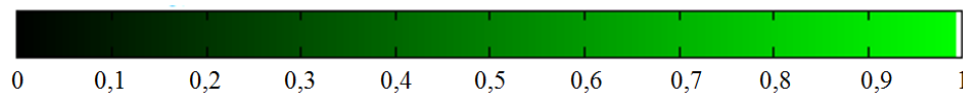
*Schwankung aller 32 Elemente*

*Schwankung aller 64 Elemente*



**Abb. 5-10** Darstellung der relativen Leistungsschwankung in Abhängigkeit des Ortes für eine zufällig erzeugte Schwankung links: aller 32 und rechts: 64 Elemente

Die Schwankungen werden mit  $P_{S,Max,rel} = \{0,2; 0,4; 0,6\}$  für alle oben beschriebenen Elementabstände berechnet. Weiterhin wird per Zufall entschieden ob eine Zeile für  $P_{S,Max,rel} = 0,6$  schwankt und in einem weiteren Test die Schwankung nur aller 2, 5 und 10 Zeilen durchgeführt. Zur Simulation werden die Parameter aus **Tab. 5-3** verwendet. Einige Beispiele der Untersuchungen sind in **Abb. 5-12** dargestellt. Um den realen Ergebnisse nahe zu kommen wird die gleiche Colormap wie in **Abb. 5-7** für den grünen frequenzverdoppelten Nd: YAG Laser verwendet (siehe **Abb. 5-11**). Die Wellenlänge ist ebenfalls annähernd die gleiche. Optisch unterscheiden sich die Ergebnisse für die verschiedenen Elementabstände nur wenig, weshalb in **Abb. 5-12** und in den weiteren Untersuchungen nur die Ergebnisse mit einer Schwankung aller 64 Elemente dargestellt sind. Die Ergebnisse unterliegen statistischen Schwankungen, d. h. für gleiche Parameter  $P_{S,Max,rel}$  ergeben sich verschiedene Beugungsbilder. Die Unterschiede sind jedoch gering.



**Abb. 5-11** Colormap der Abbildungen mit einer Wellenlänge von 532 nm

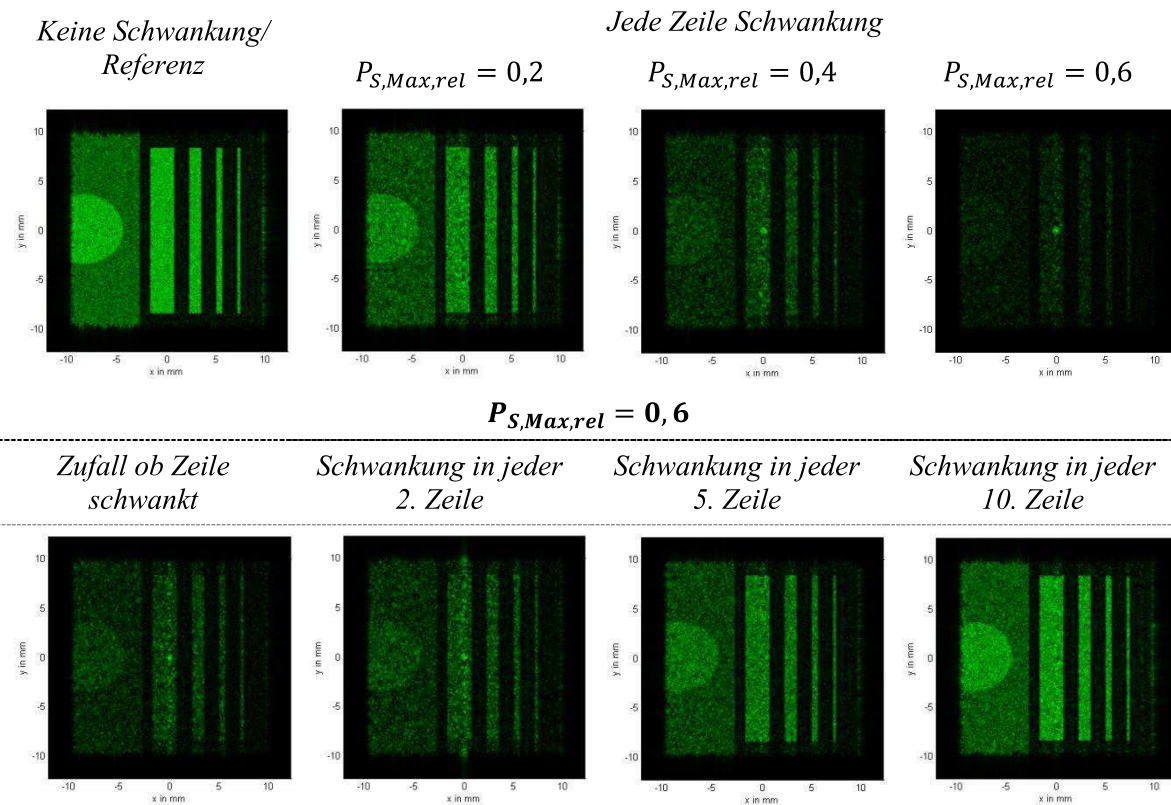
**Tab. 5-3** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von der Laserleistungsschwankung

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 300 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 300 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	532 nm	532 nm
Elementanzahl $N_x$ :	$2^8$	$2^{12}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$6 \mu\text{m}$	$6 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	220 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	

Anhand der Darstellungen in **Abb. 5-12** ist erkennbar, dass Schwankungen zu einer Verschlechterung der erhaltenen Beugungsbilder führen. Je größer die relative Leistungsschwankung, desto schlechter die Bilder. Mit zunehmender maximaler Schwankung wird die 0. Unterordnung in der Mitte stärker sichtbar und ein vertikaler Streifen, der durch Beugungseffekte erklärbar ist, bildet sich aus. Da Zeilen, vergleichbar mit einem schmalen Spalt, gestört werden, ist die Divergenz der Beugungserscheinungen in vertikaler Richtung viel größer



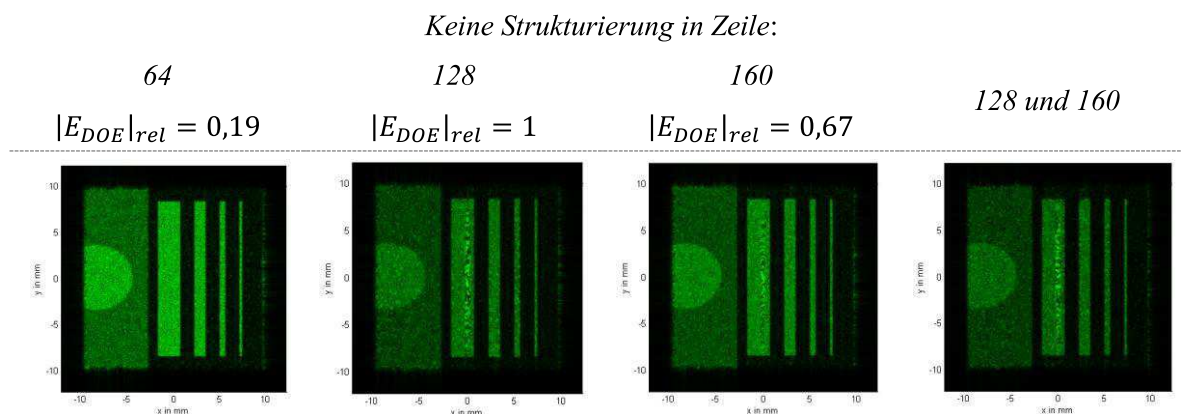
als in horizontaler. Würden Spalten gestört werden, wären die Effekte hingegen in horizontaler Richtung sichtbar. Die Sichtbarkeit der 0. Unterordnung bedeutet eine Verschlechterung der Beugungseffizienz. Die Verschlechterungseffekte sind weniger ausgeprägt, wenn nicht jede Zeile gestört wird. Bei einer Schwankung in jeder 5. Zeile, wird das Beugungsbild nur wenig beeinflusst. Die Struktur ist sehr gut sichtbar, jedoch nicht ganz so kontrastreich wie ohne Störung. Dies ist erneut ein Zeichen für die Robustheit und geringe Empfindlichkeit der DOE-Strukturen.



**Abb. 5-12** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene relative Leistungsschwankungen

Das simulierte Beugungsbild in **Abb. 5-8** weist ein Kreuz in der Mitte auf, das dem vertikalen Streifen aus **Abb. 5-12** ähnlich ist. Dies könnte ein Zeichen für leichte Leistungsschwankungen während des Herstellungsprozesses sein.

Neben den einfachen Leistungsschwankungen, die die Abtragstiefe beeinflussen, kann eine oder mehrere Zeilen unter Umständen gar nicht erzeugt werden (siehe **Abb. 5-9** rechts). Um die Auswirkungen zu simulieren, wird die Phasenlage in bestimmten Zeilen auf null gesetzt, was keinem Abtrag entspricht. Die Ergebnisse für das Fehlen einer strukturierten Zeile sind in **Abb. 5-13** für ausgewählte Beispiele dargestellt. Die Parameter werden aus **Tab. 5-3** übernommen.

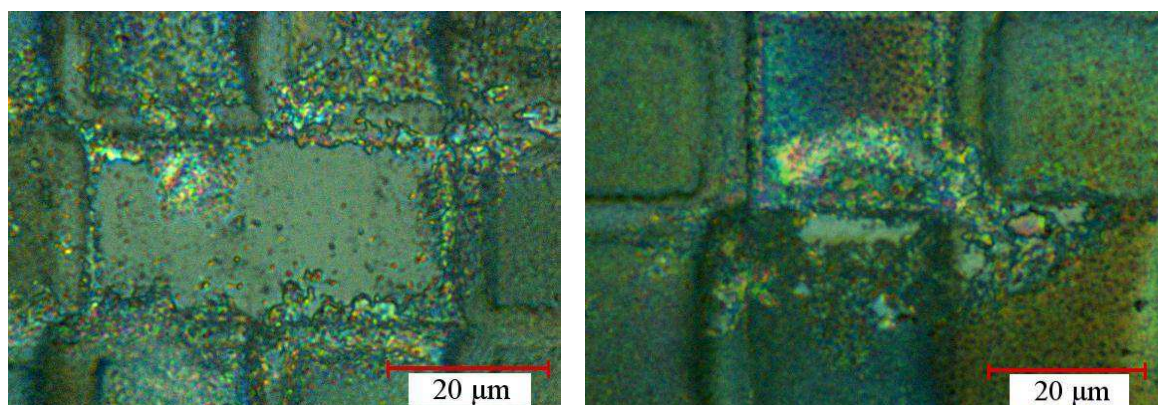


**Abb. 5-13** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit dem Auslassen der Strukturierung von definierten Zeilen

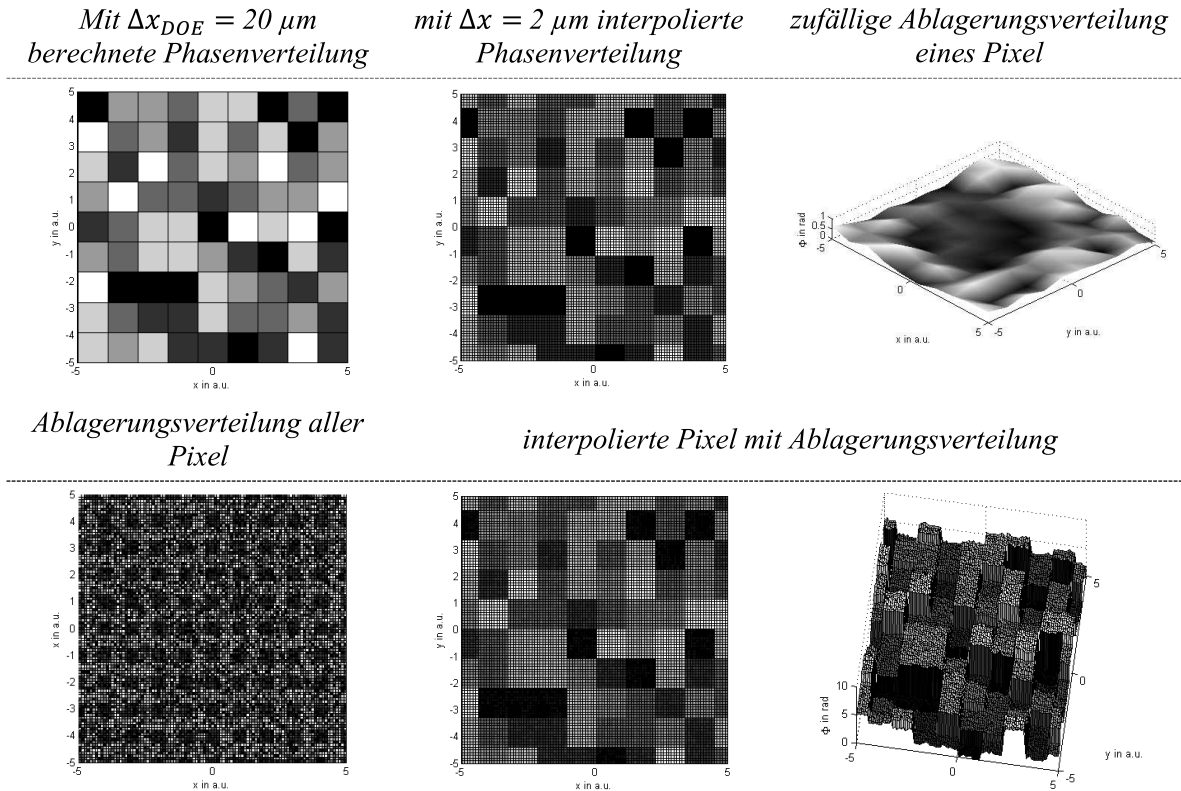
**Abb. 5-13** zeigt deutlich, dass das Auslassen von Zeilen einen sichtbaren Effekt bewirkt, wenn die elektrische Feldstärke in der gestörten Zeile einen relativ hohen Wert  $|E_{DOE}|_{rel}$  besitzt. Eine Störung in Zeile 64 hat fast keine Auswirkungen, wohingegen eine Störung am Maximum der elektrischen Feldstärke eine deutliche Veränderung hervorruft. Wird mehr als eine Zeile ausgelassen, verschlechtert sich das Beugungsbild weiter. Auch hier sind die Beugungseffekte in vertikaler Richtung besonders deutlich, da Zeilen gestört werden.

### 5.3.2 Ablagerungen

Aufgrund des Ablationsprozesses bleiben Ablagerungen, sogenannte Debris, auf den verschiedenen Pixeln zurück. Dies ist in **Abb. 5-3** links und **Abb. 5-14** zu sehen. In den meisten Fällen sind die Ablagerungen an den Randbereichen der Pixel am größten.



**Abb. 5-14** Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit deutlicher Sichtbarkeit der Ablagerungen bei 2000facher Vergrößerung; ungereinigter Zustand des DOEs



**Abb. 5-15** Schematische Darstellung der einzelnen Abläufe zur Simulation von Ablagerungen auf den DOE-Strukturen;  $S_{Max,Out,rel} = 0,1$ ;  $S_{Max,In,rel} = 0,03$

Um die Auswirkungen der Ablagerungen zu bestimmen, wird der folgende Algorithmus, dessen Schritte zur Verdeutlichung schematisch in **Abb. 5-15** dargestellt sind, durchgeführt:

Da die Ablagerungen wesentlich kleiner als die Pixelgröße sind, wird zunächst ein DOE mit einer Pixelgröße von  $\Delta x_{DOE} = 20 \mu m$  berechnet. Anschließend erfolgt eine Verkleinerung der Elementgröße auf  $\Delta x = 2 \mu m$  durch Interpolation, damit die Ablagerungen hinreichend gut diskretisiert werden können. Durch die Interpolation nach der Methode des nächsten Nachbarn sind die an den Randgebieten liegenden Gesamtpixel, d. h. alle interpolierten Elemente mit gleicher Phasenlage, nur halb bzw. in den Ecken ein Viertel mal so groß wie die ursprünglichen Pixel. Aufgrund der Überabtastung vom Faktor 10, entstehen 10 Ordnungen (vgl. 3.4.3) in horizontaler und vertikaler Richtung. Dieser Effekt kommt den echten erhaltenen Beugungsbildern sehr nahe. Für jedes interpolierte Pixel wird eine separate Ablagerungsverteilung berechnet. Die Größe der Ablagerungen wird durch Zufallszahlen zwischen 0 und 1 variiert. Die Erzeugung durch Zufallszahlen und separate Berechnung für jedes Pixel kommt dem realen Ablationsprozess sehr nahe, da Ablagerungen sich nach keiner Funktion beschreiben lassen und die Menge und Größe stochastisch variiert. Weiterhin lassen sich so die Veränderungen besser parametrisieren. Für die drei äußersten Pixel wird eine Grenze von



$S_{Max,Out,rel}$  und für die inneren Pixel eine Grenze von  $S_{Max,In,rel}$  festgelegt. Die verschiedenen Ablagerungsverteilungen werden anschließend zu den einzelnen Pixeln über:

$$\text{Phasenlage mit Ablagerungen} \quad \varphi_{Ab} = \varphi + (S_{Max,Out,rel} \cdot A_{Out} + S_{Max,In,rel} \cdot A_{In}) \cdot 2 \cdot \pi \quad (5-15)$$

addiert.  $A_{In}$  und  $A_{Out}$  bezeichnen die jeweiligen Teilflächen eines Pixels.  $A_{In}$  enthält die inneren Elemente und  $A_{Out}$  die äußeren.

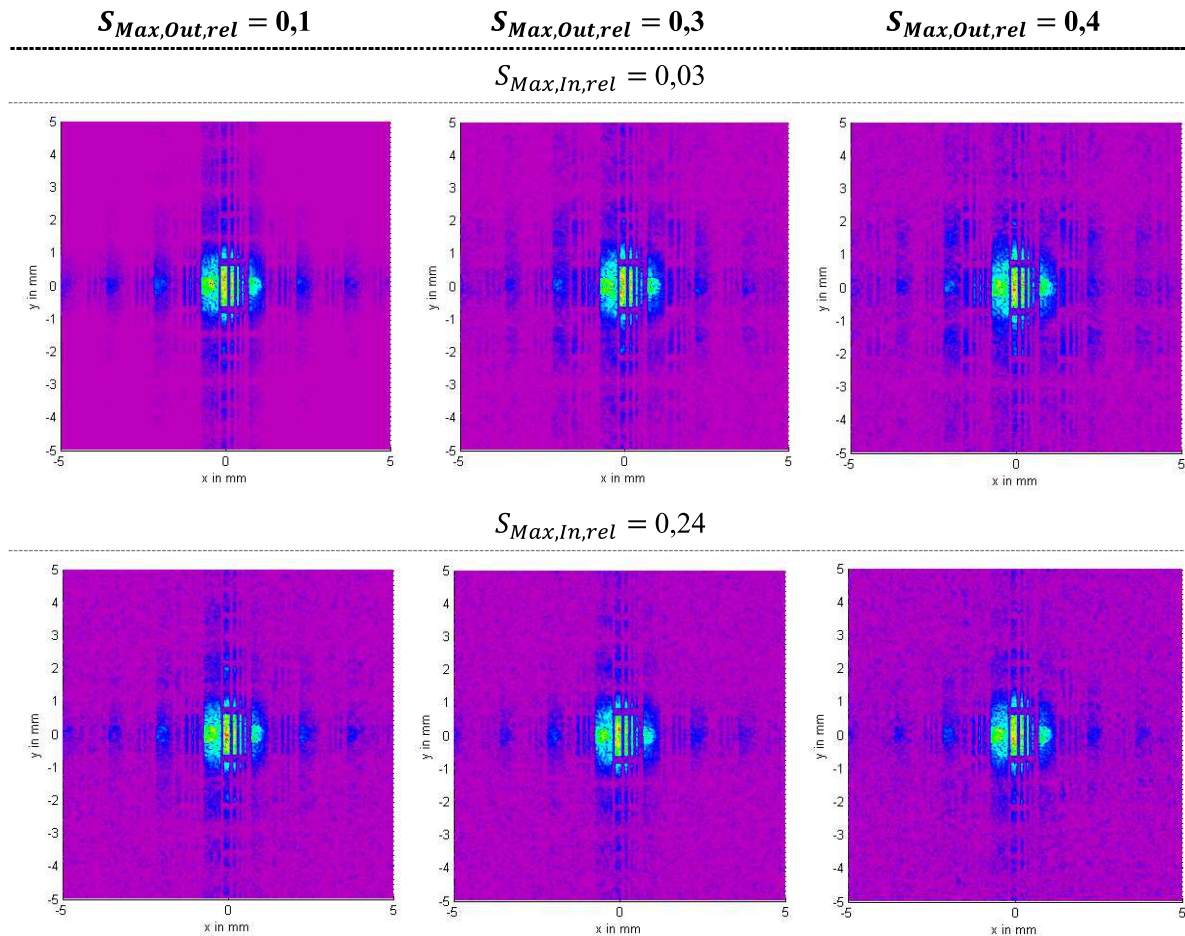
Zur Simulationen der Auswirkungen verschiedener Ablagerungen werden die Parameter  $S_{Max,Out,rel}$  und  $S_{Max,In,rel}$  variiert. Die erhaltenen Beugungsbilder sind in **Abb. 5-16** zu finden. Die Parameter für die Berechnung werden aus **Tab. 5-4** verwendet. Zur besseren Sichtbarkeit wird für die Abbildungen die Falschfarbendarstellung aus **Abb. 5-5** für die relative elektrische Feldstärke gewählt. Um Platz zu sparen wird in den Abbildungen auf die Angabe der Colorbar verzichtet.

**Tab. 5-4** Übersicht der verwendeten Parameter zur Bestimmung der Abhängigkeit der Beugungsbilder von Ablagerungen

	<i>DOE-Berechnung</i>	<i>Abbildung</i>
Propagationsoperator $P$ :	Fraunhofer FFT	Fresnel spektral
Strahlprofil:	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,IFTA} = 180 \mu\text{m}$	Gaußstrahl $w_{0,\sigma,Abb} = 180 \mu\text{m}$
Wellenlänge $\lambda_0$ :	532 nm	532 nm
Elementanzahl $N_x$ :	$2^6$	$2^{13}$
Elementgröße $\Delta x$ :	$20 \mu\text{m}$	$2 \mu\text{m}$
Entfernung $\Delta z$ :	Unendlich	55 mm
Iterationsschritte:	30	Linsenterm: ja
Diskretisierungsstufen $p$ :	22	

**Abb. 5-16** zeigt, dass die Ablagerungen zu einer Verschlechterung des erhaltenen Beugungsbildes führen. Je größer die äußeren Bereiche  $S_{Max,Out,rel}$  sind, desto mehr kommen die Nebenmaxima in diagonalen Richtung zum Vorschein. Die Sinc-Funktion, welche die Intensität der höheren Ordnungen moduliert und zur Folge hat, dass die horizontalen und vertikalen Beugungsordnungen, am stärksten ausgeprägt sind, ist nicht mehr dominierend. Der Grund ist eine Homogenisierung des Bildbereiches. Die Bereiche mit niedrigerer Feldstärke werden verstärkt und Bereiche mit höherer Feldstärke abgeschwächt. Sind die Ablagerungen in der Mitte höher als am Rand treten ähnliche Effekte wie eben beschrieben auf. Die höheren Ordnungen sind jedoch nicht so deutlich sichtbar. Sind beide Höhenstufen etwa gleich ausgeprägt, ist die

modulierende Sinc-Funktion wieder deutlich zu sehen. Auch das Hintergrundrauschen ist stärker ausgeprägt. Die Ordnungen unterscheiden sich nur wenig vom Hintergrund.



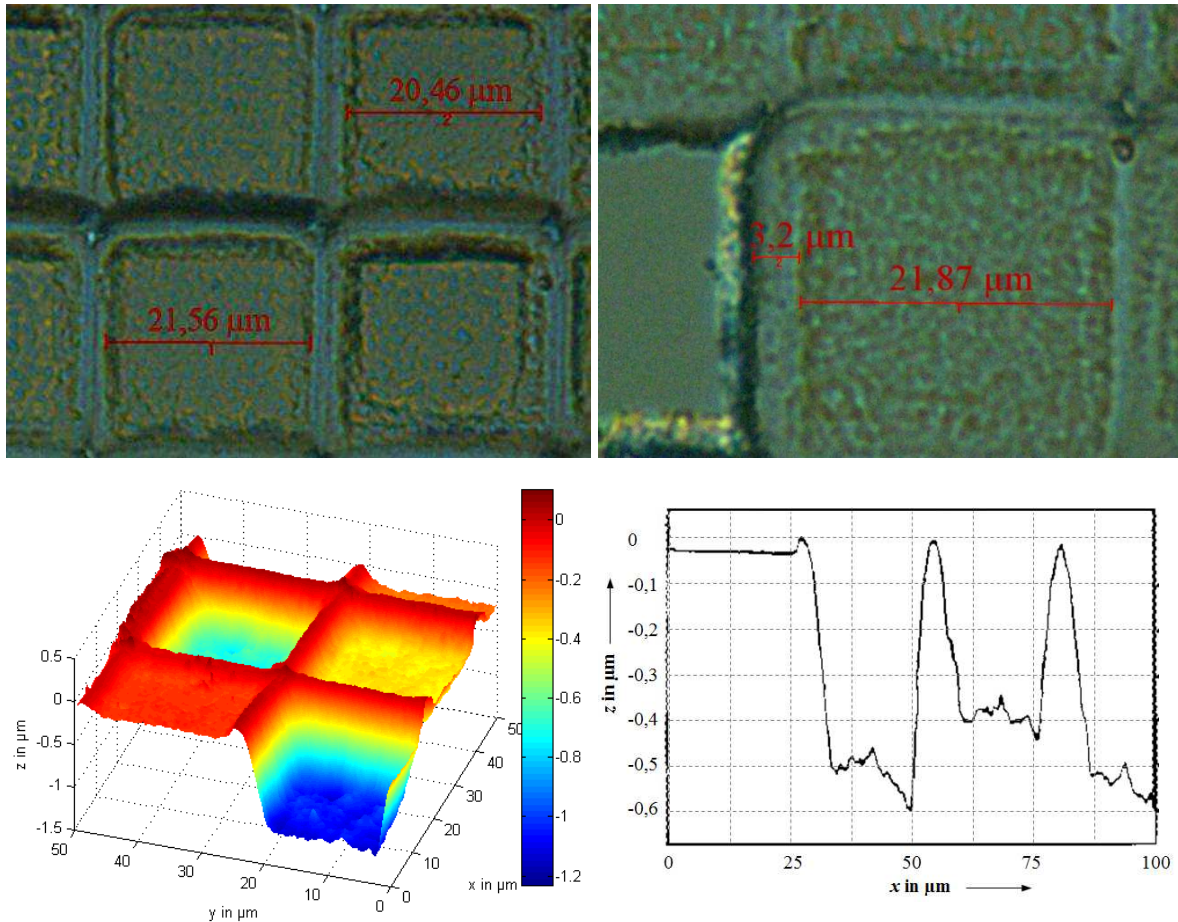
**Abb. 5-16** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Höhenstufen der Ablagerungen

### 5.3.3 Stege

Wie bereits unter **5.1** beschrieben wird, stimmt der Abbildungsmaßstab der Maskenprojektion nicht mit dem vorgegebenen Wert überein. Die Pixel sind kleiner als berechnet. Zwischen den einzelnen Pixeln bleiben unbearbeitete Gebiete, die wie Stege bei der Beugung am Gitter wirken. Zur Verdeutlichung sind zwei ausgewählte optische Mikroskop-Aufnahmen, sowie eine vergrößerte NANOFOCUS- und eine DEKTAK-Aufnahme in **Abb. 5-17** dargestellt.

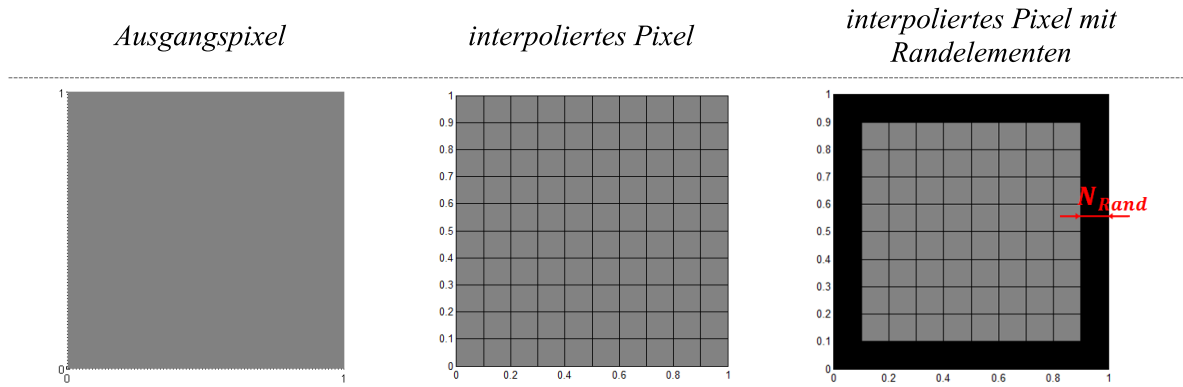
Anhand der DEKTAK-Aufnahme in **Abb. 5-17** wird deutlich, dass durch Materialveränderungen bzw. Ablagerungen auch Stege an nichtbearbeiteten Stellen entstehen. Das linke ebene Gebiet stellt das unbearbeitete Substrat dar. Die Aufnahme zeigt ebenfalls, dass

die Tiefe eines Pixels nicht einheitlich ist. Auf der rechts Seite ist die Vertiefung größer als auf der linken Seite. Dieser Effekt ist auch in den NANOFOCUS-Aufnahmen in **Abb. 5-3** zu sehen.

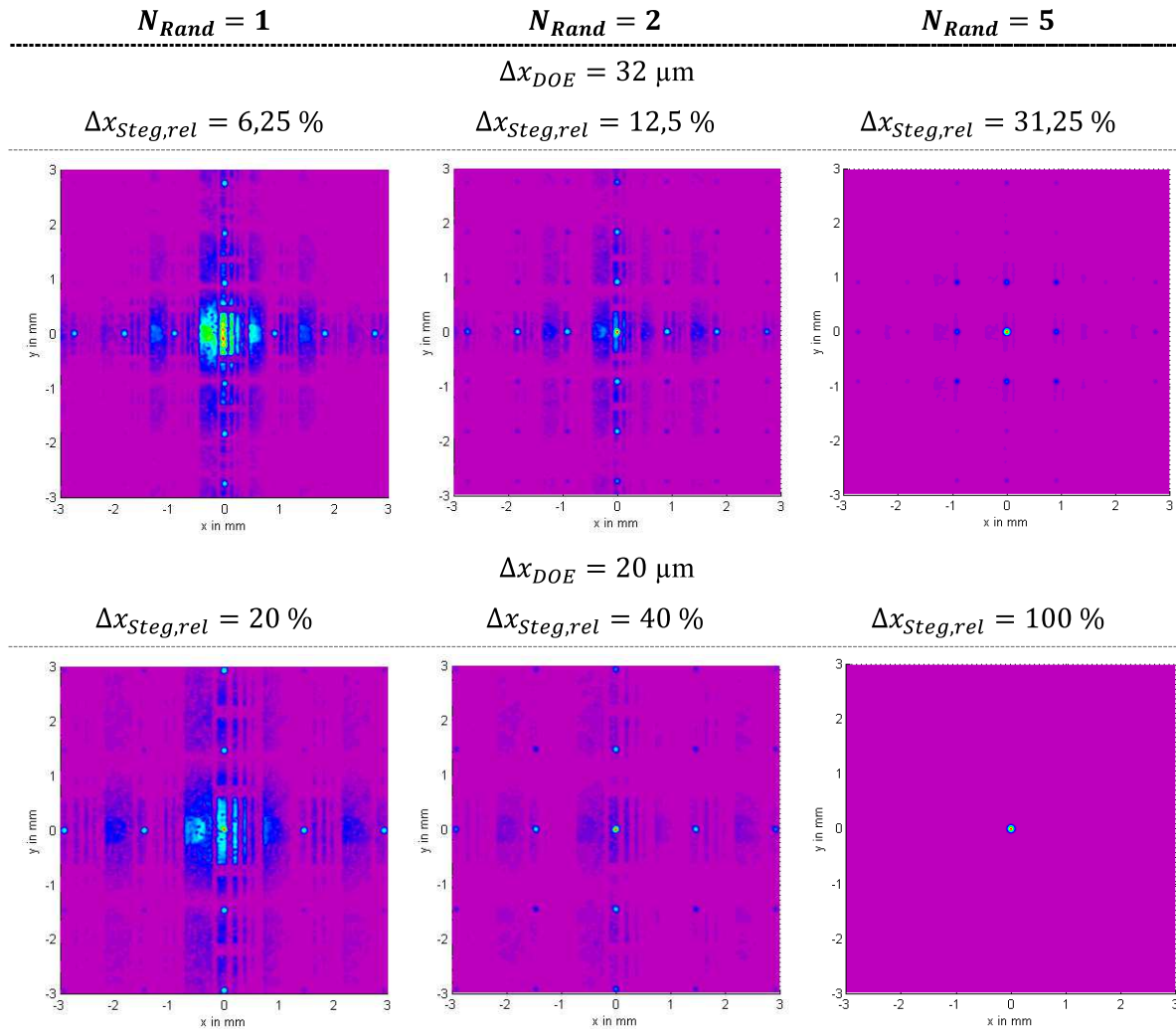


**Abb. 5-17** oben: Darstellung zweier ausgewählter KEYENCE-Aufnahmen mit Kennzeichnung der Breite der Pixel und Stege, Vergrößerung: links: 2000; rechts: 4000; unten links: NANOFOCUS-Aufnahme mit 100facher Vergrößerung; unten rechts: DEKTAK-Aufnahme; alle Darstellungen nach der Reinigung

Für die Simulation der Auswirkungen der Stege wird ähnlich wie in **5.3.2** verfahren. Ein Bild mit großer Pixelgröße wird durch Interpolation in kleinere Elemente unterteilt. Anschließend werden die Randlelemente auf den Wert  $\varphi = 0$  gesetzt. Als Parameter wird die Anzahl der vom jeweiligen Rand aus gezählten und auf 0 gesetzten Elemente  $N_{Rand}$  verwendet. Der Parameter ist in **Abb. 5-18** schematisch veranschaulicht. In der Simulation wird der Parameter  $N_{Rand}$  von 1 bis 5 variiert und ausgewählte Ergebnisse sind in **Abb. 5-19** dargestellt. In der Abbildung ist ebenfalls die relative Breite der Stege  $\Delta x_{Steg,rel}$  in Bezug auf die Pixelgröße  $\Delta x_{DOE}$  dargestellt. Die Berechnung erfolgt zum einen mit den Parametern aus **Tab. 5-4** und die weiteren Parameter sind in **Abb. 5-19** gekennzeichnet.



**Abb. 5-18** Schematische Darstellung der Algorithmus-Schritte zur Erstellung von Stegen; grau: beliebiger Phasenunterschied; schwarz: Phasenunterschied 0



**Abb. 5-19** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder für verschiedene Stegbreiten

**Abb. 5-19** zeigt, dass dem Beugungsbild des DOEs ein zusätzliches Beugungsbild durch die Stege überlagert ist. Die Stege bewirken eine Beugung des Ausgangsstrahlprofils an einem optischen Gitter. Die Maxima befinden sich in der Mitte der verschiedenen

Beugungsordnungen der DOE-Struktur. Der Grund ist, dass die Gitterkonstante des optischen Gitters (Stege und Lücke zusammen) mit der Pixelgröße des DOE  $\Delta x_{DOE}$  übereinstimmt. Die relative Größe der Stege hat keinen Einfluss auf die Lage der Maxima. Mit zunehmender Stegbreite wird das Beugungsbild des überlagerten Gitters deutlicher und ausgeprägter. Der Grund ist, dass sich die Gesamtleistung in die Beugungsbilder des Gitters und des DOEs aufteilt. Die relative Stegbreite  $\Delta x_{steg,rel}$  bestimmt den relativen Leistungsanteil des Beugungsbildes des Gitters. Der relative Anteil der Stege an der gesamten Pixelfläche berechnet sich aus  $2 \cdot \Delta x_{steg,rel} - \Delta x_{steg,rel}^2$ . Unter der Bedingung, dass die Feldstärke eines Pixels annähernd konstant ist, kann sie dem relativen Leistungsanteil in erster Näherung gleich gesetzt werden. Je nach Strahlprofil müsste berechnet werden wie hoch der genaue Anteil ist. Da die Fläche der einzelnen Nebenmaxima des Gitterbildes wesentlich geringer als die Fläche der DOE-Abbildungen ist, besitzen die Gitterbilder nach:

$$\begin{array}{l} \text{Leistung einer} \\ \text{Teilfläche } A_i \end{array} \quad P_i = \iint_{A_i} I(x, y) \, dx \, dy \quad (5-16)$$

$$\begin{array}{l} \text{Gesamtleistung} \end{array} \quad P_{ges} = P_{DOE} + P_{Gitter} \quad (5-17)$$

$$\begin{array}{l} \text{Leistungsanteil des} \\ \text{Beugungsbild des} \\ \text{Gitters} \end{array} \quad P_{Gitter} \approx (2 \cdot \Delta x_{steg,rel} - \Delta x_{steg,rel}^2) \cdot P_{ges} \quad (5-18)$$

eine viel größere Intensität bzw. Feldstärke. Weiterhin ist in **Abb. 5-19** zu sehen, dass sich die Größe der Ordnungen durch die Stege nicht ändert. Eine Änderung in den Positionen der Minima der modulierenden Sinc-Funktion kann durch die Verwendung von Stegen nicht festgestellt werden.

Eine weitere Interpretationsmöglichkeit ist, dass durch die Stege die ideale Phasenstruktur stark gestört wird. Die 0. Unterordnung kann sichtbar werden und die Beugungseffizienz ist verringert.

Die in **Abb. 5-7** sichtbaren Nebenmaxima mit hoher Intensität sind durch die Untersuchungen in diesem Unterkapitel eindeutig auf die Stege zurück zu führen.

Eine nachträgliche Entfernung der Stege ist nur schwer bzw. kaum möglich. Eine Möglichkeit wäre selektives Ätzen. Mit isotropen Ätzen würden sich auch die Höhenunterschiede erhöhen, wodurch die Phasenänderungen nicht mehr korrekt sind.



### 5.3.4 Glättung

Der Ablationsprozess und die anschließende Reinigung im KOH-Bad führen beide zu einer Kantenverrundung. Die Glättungen sollen in diesem Unterkapitel nachgebildet und deren Effekte aufgezeigt werden.

In der digitalen Bildverarbeitung wird eine Kantenglättung mit Hilfe eines Glättungsoperators durchgeführt. Dazu wird am häufigsten ein Gauß-Filter  $h$  der Form:

$$h_g(n_1, n_2) = e^{-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}}$$

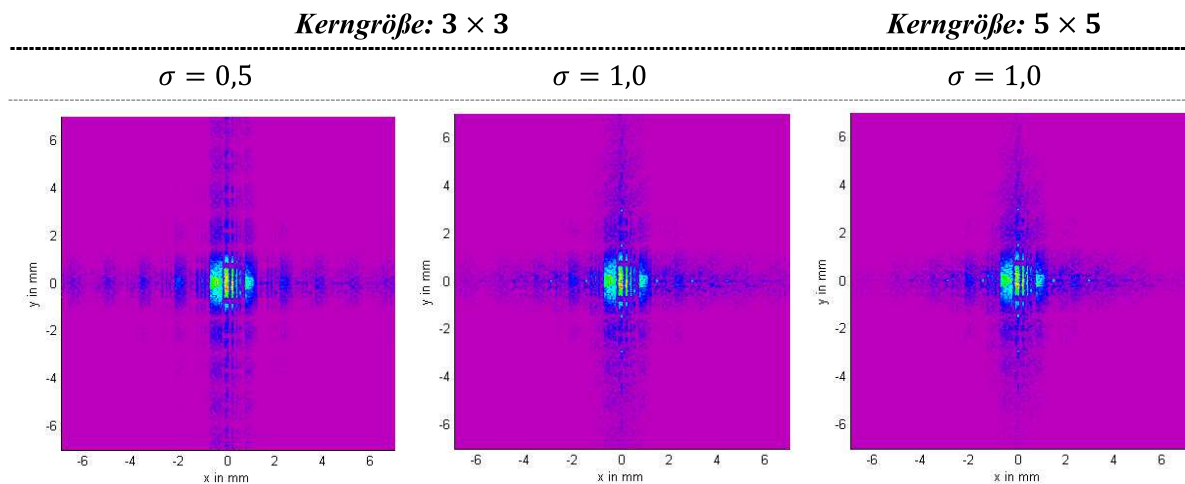
$$S = \sum_{n_1} \sum_{n_2} h_g \quad (5-19)$$

*Gauß-Filter*

$$h(n_1, n_2) = \frac{h_g(n_1, n_2)}{S}$$

verwendet.  $\sigma$  bezeichnet in diesem Zusammenhang die Standardabweichung,  $n_1$  und  $n_2$  die Komponenten des Filterkerns. Bei einer Größe des Kerns von  $N_{gx} \times N_{gy}$  nimmt  $n_1$  die Werte  $-\left\lfloor \frac{N_{gx}}{2} \right\rfloor : 1 : \left\lfloor \frac{N_{gx}}{2} \right\rfloor$  bzw.  $n_2$  entsprechend die Werte  $-\left\lfloor \frac{N_{gy}}{2} \right\rfloor : 1 : \left\lfloor \frac{N_{gy}}{2} \right\rfloor$  an.

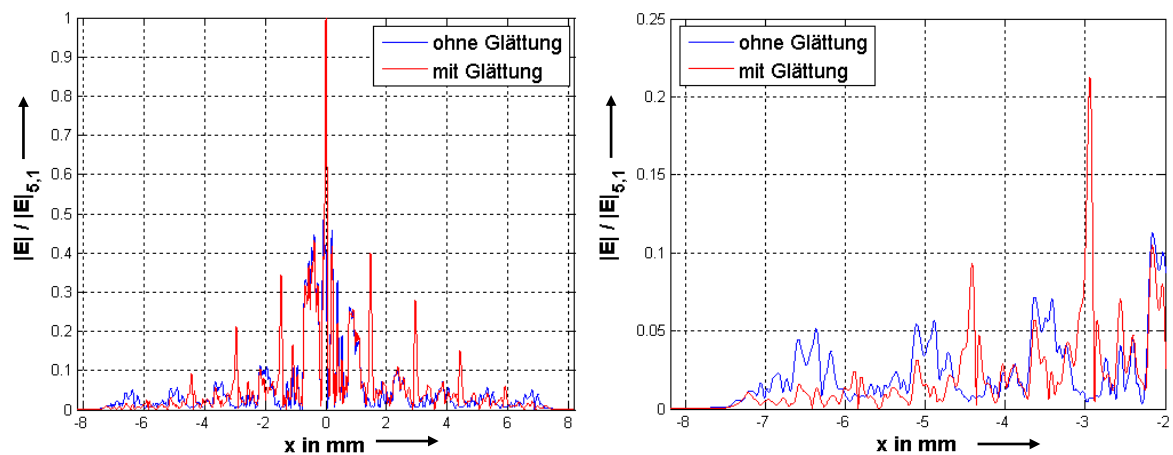
Zur Bestimmung der Auswirkungen werden auch hier die Pixel durch Interpolation verkleinert und anschließend der Operator auf die Phasenverteilung angewandt. Die Auswirkungen des Glättungsoperators auf das berechnete Beugungsbild sind für ausgewählte Beispiele mit verschiedenen Parametern des Operators in **Abb. 5-20** visualisiert. Die Simulation erfolgt mit den Parameter aus **Tab. 5-4**. Für alle Berechnungen wird die gleiche Anfangsphase verwendet.



**Abb. 5-20** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit Kantenglättung für verschiedene Parameter des Glättungsoperators

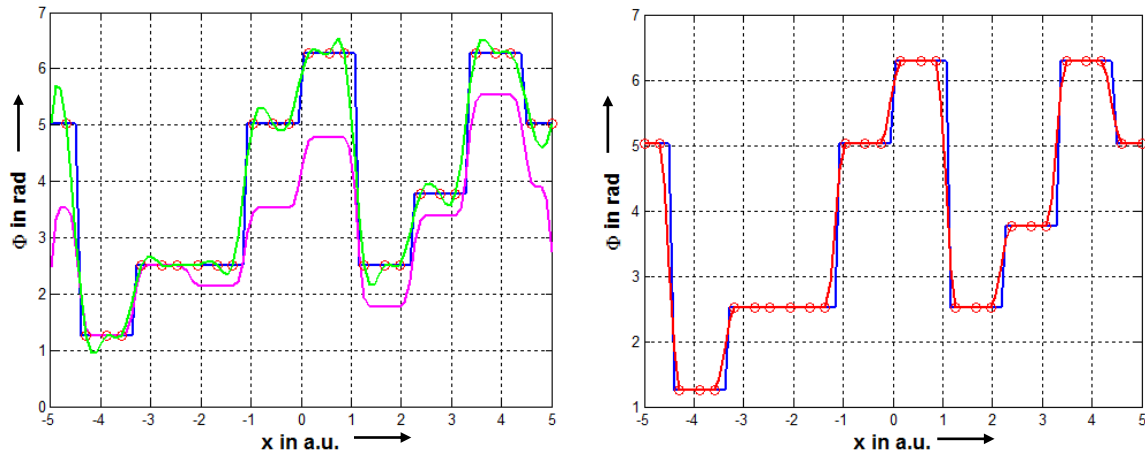
Anhand der Darstellung in **Abb. 5-20** ist deutlich zu sehen, dass die Glättung mittels Gauß-Filter zu einer Verringerung der Feldstärke der höheren Ordnungen führt. Das Bild der höheren Ordnungen wird mit steigender Filterkerngröße und Standardabweichung schlechter und ist stark verrauscht. Die eigentliche Struktur ist nicht mehr erkennbar. Auch die 0. Ordnung ist davon betroffen. Sie wird unschärfer und in jeder höheren Ordnung entsteht in der Mitte eine Feldstärkespitze. Dies ist zur Verdeutlichung noch einmal in **Abb. 5-21** im Querschnitt entlang der  $x$ -Achse dargestellt.

**Abb. 5-21** zeigt, dass die Abbildung der 0. Ordnung noch gut mit der Abbildung ohne Filter überein stimmt, jedoch befindet sich in ihrer Mitte eine Feldstärkespitze. Mit Filter fällt die Feldstärke in den äußeren Bereichen schneller ab als ohne Filter. In jeder Ordnung werden Feldstärkespitzen sichtbar. Diese sorgen dafür, dass die einzelnen Beugungsordnungen in **Abb. 5-20** schwächer erscheinen, da die Spitzen eine wesentlich größere Feldstärke besitzen. Die Spitzen stellen die 0. Unterordnungen dar und sind ein Zeichen, dass die geglättete Phasenlage von der ursprünglich berechneten Phasenlage abweicht und Fehler aufweist. Die Beugungseffizienz ist herab gesetzt. Bei Betrachtung der Wirkung eines Gauß-Filters mit einem  $5 \times 5$  Kern und  $\sigma = 1$  auf eine willkürliche Phasenlage in **Abb. 5-22** wird deutlich, dass die nach der Filterung erhaltenen Phasenlagen z. T. erheblich von den ursprünglichen abweichen und damit die 0. Unterordnungen erklärbar sind.



**Abb. 5-21** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder im Querschnitt; blau:

Beugungsbild ohne Filter; rot: Beugungsbild mit Gauß-Filter ( $5 \times 5, \sigma = 1,0$ ); normiert auf die elektrische Feldstärke des Beugungsbildes mit Filter  $|E|_{5,1}$ ; links: kompletter Querschnitt; rechts: nur Anfangsbereich



**Abb. 5-22** Darstellung der Ergebnisse verschiedener Glättungstechniken; blau: ungeglättete Phasenlage; rote Kreise: Stützstellen; links: Magenta: Gauß-Filter, grün: kubische Spline-Interpolation; rechts: rot: kubisch hermitesche Spline-Interpolation

Eine Alternative zum Gauß-Operator wäre eine Interpolation an den Sprungstellen. Eine sehr gebräuchliche Interpolationstechnik ist die kubische Spline-Interpolation. Diese führt zu Überschwingern, was ebenfalls in **Abb. 5-22** dargestellt ist. Viel bessere Ergebnisse liefert die Verwendung eines kubisch hermiteschen Splines (siehe **Abb. 5-22** rechts). Durch Vergleich der interpolierten Kanten der kubisch hermiteschen Spline-Interpolation mit den real entstandenen Kanten (**Abb. 5-17** DEKTAK-Aufnahme) wird eine gute Übereinstimmung sichtbar. Die Glättung kommt der Wirklichkeit sehr nahe.

Für die Interpolation wird der Parameter  $N_{spline}$  verwendet. Er kennzeichnet um wie viele Elemente die Stützstellen von der Sprungstelle nach links und rechts entfernt sind. Die Interpolation erfolgt mit Hilfe des MATLAB-Befehls `pchip()`. Er ist nur für eindimensionale – und nicht für zweidimensionale Interpolationen verfügbar. Daher wird zunächst jede Zeile in  $x$ -Richtung interpoliert.

*Interpolation in  $x$ -Richtung*

$$\varphi_x(\varphi(x, y)) = \text{pchip}(x_i, \varphi(x_i, y), x) \quad (5-20)$$

$x_i$  und  $\varphi(x_i, y)$  bezeichnen die zur Interpolation verwendeten Stützstellen und  $\varphi_x$  die Anwendung der Interpolation in  $x$ -Richtung mit den zu interpolierenden Koordinaten  $x$ . Die Gesamtinterpolation erfolgt durch nochmalige Interpolation in  $y$ -Richtung:

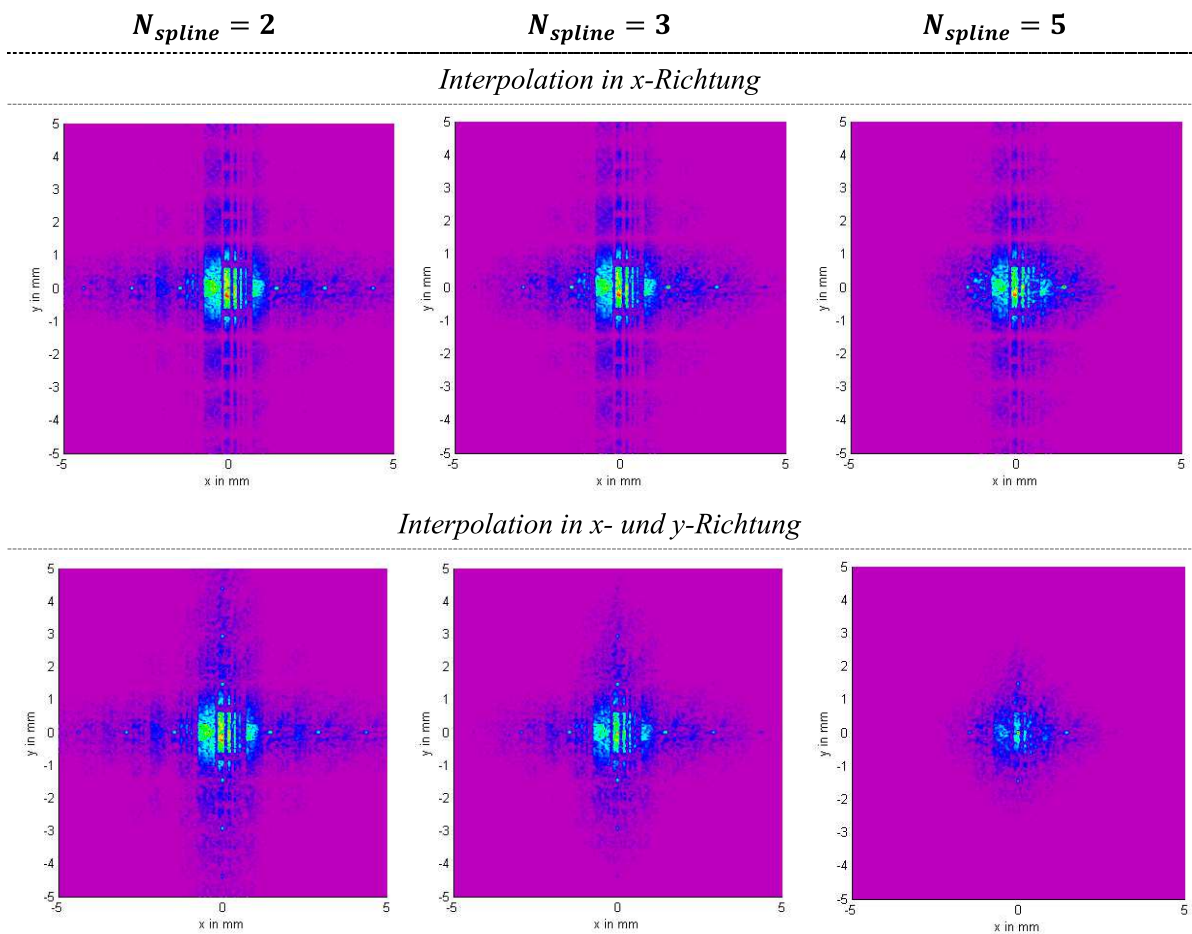
$$\text{Gesamtinterpolation} \quad \varphi_{Int}(x, y) = \varphi_y(\varphi_x(\varphi(x, y))) = \text{pchip}(y_i, \varphi_x(\varphi(x, y)), y) \quad (5-21)$$

Die Ergebnisse sind für verschiedene Werte von  $N_{spline}$  in **Abb. 5-23** zusammen gefasst. Die Interpolation in  $x$ -Richtung und die Gesamtinterpolation sind separat ausgewiesen. Für die Berechnung werden erneut die Parameter aus **Tab. 5-4** verwendet.



Die oberen Darstellungen in **Abb. 5-23** zeigen, dass die Feldstärke höherer Ordnungen in  $x$ -Richtung deutlich reduziert werden kann. Weiterhin treten die 0. Unterordnungen nur in höheren Ordnungen und nicht in der 0. Ordnung auf. Diese Aussage wird durch die separate Schnittdarstellung entlang der  $x$ -Achse in **Abb. 5-24** gestützt.

Durch eine zusätzliche Interpolation in  $y$ -Richtung können auch die höheren Ordnungen in dieser Richtung reduziert werden. Das Beugungsbild wird dadurch insgesamt schlechter. In der 0. Ordnung ist eine deutliche Feldstärkespitze zu sehen. Der Grund ist die bereits in  $x$ -Richtung interpolierte Phasenlage. Interpolierte Werte dienen als Stützstellen. Ungenauigkeiten und Abweichungen von der idealen Phasenlage entstehen. Sie haben einen großen Einfluss.



**Abb. 5-23** Darstellung der erhaltenen Beugungsbilder mit verschiedenen kubisch hermiteschen Interpolationen

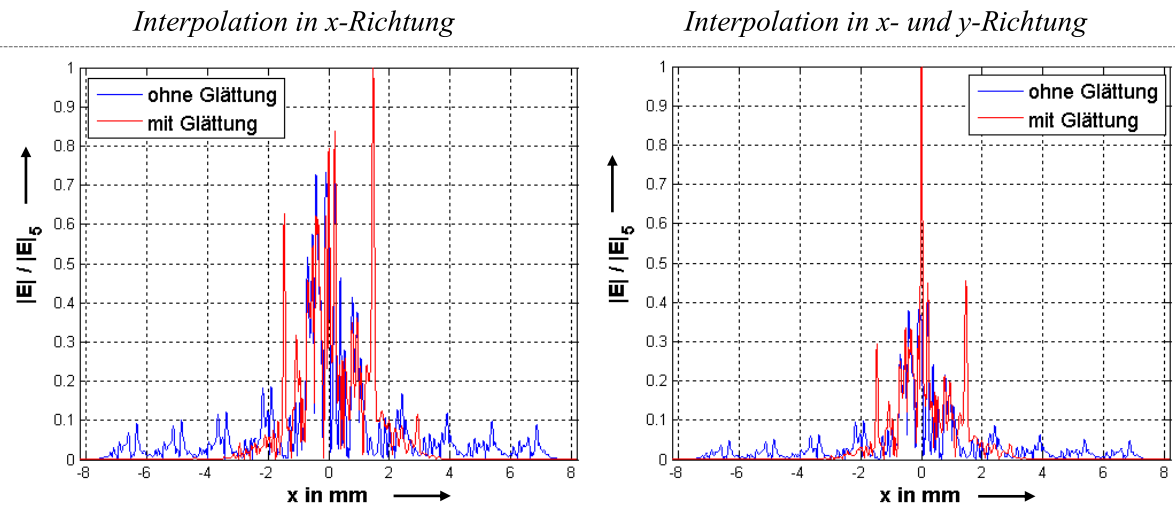
Eine separate Interpolation in beide Richtung und anschließende Mittelwertbildung der beiden Matrizen, sowie die Verwendung des Minimums bzw. des Maximums der Matrizen erreicht nur die Erzeugung der 0. Unterordnungen in den höheren Ordnungen, jedoch keine Reduzierung ihrer Sichtbarkeit.

Mittelwertbildung 
$$\varphi_{\text{Mittel}}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (\varphi_x(\varphi(x, y)) + \varphi_y(\varphi(x, y))) \quad (5-22)$$

Minimum-Funktion 
$$\varphi_{\text{Min}}(x, y) = \min(\varphi_x(\varphi(x, y)), \varphi_y(\varphi(x, y))) \quad (5-23)$$

Maximum-Funktion 
$$\varphi_{\text{Max}}(x, y) = \max(\varphi_x(\varphi(x, y)), (\varphi(x, y))) \quad (5-24)$$

Auf eine zusätzliche Darstellung der mit den Interpolationstechniken (5-22) bis (5-24) berechneten Beugungsbilder wird verzichtet.



**Abb. 5-24** Darstellung erhaltenen Querschnitte für: blau: ohne Interpolation; rot: mit Interpolation  $N_{\text{spline}} = 5$ ; links: Interpolation nur in x-Richtung; rechts: Interpolation in x- und y-Richtung; beide Darstellungen normiert auf die elektrische Feldstärke mit Interpolation  $|E|_5$

Im verwendeten Beispiel wird ein großes Pixel in 10 kleinere Elemente in x- und y-Richtung aufgeteilt.  $N_{\text{spline}} = 5$  ist der größtmögliche Parameter. Die höheren Ordnungen können, wie in **Abb. 5-23** zu sehen ist, fast vollständig reduziert werden. Eine Glättung der DOE-Strukturen verursacht nicht zwangsläufig eine Verschlechterung des Beugungsbildes. Eine ideale Glättung würde einem kontinuierlichen Phasenverlauf entsprechen und in der Abbildung wären keine höheren Ordnungen enthalten. Dies würde einer deutlichen Verbesserung entsprechen. Die höheren Ordnungen sind für viele Anwendungsfälle unerwünscht und störend. Der exakte Nachweis zur Beseitigung der höheren Ordnungen ohne Beeinflussung der 0. Ordnung kann in der Simulation nicht gebracht werden. Die Ursache sind die beschriebenen Probleme bei der Interpolation.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### Zusammenfassung

Die Untersuchungen konnten den Einfluss der verschiedenen Parameter auf das erhaltene Beugungsbild zeigen. Die Ergebnisse dazu sind nachfolgend kurz beschrieben.

Die Berechnung der notwendigen Phasenlage  $\varphi_{DOE}$  um aus der Feldstärkeverteilung  $E_{DOE}$  die gewünschte Amplitudenverteilung  $|E_B|$  zu erhalten, ist mit dem Iterativen Fourier Algorithmus (IFTA) nach Gerchberg und Saxton möglich. Die DOEs lassen sich in zwei Gruppen, Fourier- und Fresnel-Elemente, einteilen.

Mit Hilfe der Fraunhofer-Näherung ohne Vorfaktor ist die Berechnung von Fourier-Elementen möglich. Sie erzeugen ein Beugungsbild, das im Fernfeld oder durch Verwendung einer Linse scharf abgebildet werden kann. Der Beginn des Fernfeldes kann mit Hilfe von Formel (3-47) abgeschätzt werden. Die Wirkung einer Linse kann durch einen Linsenterm nach (3-4) nachgebildet werden. Wird der Linsenterm zur berechneten Phasenlage des DOE addiert, entsteht ein Fresnel-Element. Solche Elemente erzeugen nur in einer definierten Entfernung ein scharf abgebildetes Beugungsbild. Die Berechnung von Fresnel-Elementen ist mit jedem Propagationsoperator möglich, jedoch stellt die Berechnungsdauer den limitierenden Faktor bei der Verwendung von Operatoren in Integralform dar.

Mit zunehmender Anzahl an Iterationsschritten konvergiert bzw. schwankt die Summe der quadratischen Abweichungen zwischen gewünschtem Bild  $E_B$  und tatsächlich erhaltenem Bild  $E'_B$  um einen Grenzwert. Eine höhere Anzahl an Iterationsschritten bedeutet aufgrund der Schwankungen nicht unbedingt eine geringere Summe der quadratischen Abweichungen. Etwa 30 Iterationsschritte sind zum Erreichen der Konvergenz notwendig.

Eine kontinuierliche Phasenlage erzeugt die besten Beugungsbilder. Durch eine Diskretisierung der Phasenlage erhöht sich die Summe der quadratischen Abweichungen. Sie konvergiert bzw. schwankt mit zunehmender Anzahl an Diskretisierungsstufen um einen Grenzwert. Die Größe des Grenzwertes hängt von der Struktur selbst ab. Ab etwa 20 Diskretisierungsstufen ist der Bereich der Konvergenz erreicht.

Die einzelnen Beugungsordnungen  $l$  lassen sich in Unterordnungen  $o$  unterteilen. Wie stark eine Unterordnung ausgeprägt ist, kann mit Hilfe der Beugungseffizienz nach (3-19) abgeschätzt werden. Eine Störung der idealen Struktur bedeutet eine Verringerung der Beugungseffizienz.

Die Größe einer Ordnung kann mit Formel (3-10) bzw. (3-13) bestimmt werden. Einen entscheidenden Einfluss besitzt die Pixelgröße. Eine Trennung der Ordnungen ist nicht möglich. Die nächsthöhere Ordnung schließt immer direkt an die vorherige an.

Die höheren Ordnungen werden bei einem Propagationsoperator auf Basis der Fast Fourier-Transformation nur bei Überabtastung sichtbar. Wie viele Ordnungen sichtbar werden, hängt vom Faktor der Überabtastung  $N_{\text{ÜA}}$  ab. In der Realität wird ein Pixel theoretisch unendlich Mal abgetastet und unendlich viele Ordnungen würden sichtbar werden. Durch die Modulation mit einer Sinc-Funktion nach (3-14) bzw. (3-15) nimmt die Feldstärke höherer Ordnungen ab. Weiterhin existiert durch (3-27) eine Mindestpixelgröße. Diese gibt an, ob eine Ordnung  $m$  bei einem Beugungswinkel  $\sigma_m$  von maximal  $90^\circ$  sichtbar werden kann.

Eine Abweichung der Parameter zur Berechnung der Abbildung von den Parametern, mit denen die Phasenlage des DOEs berechnet wurde, führt zu einer Verschlechterung des Beugungsbildes. So erfolgt durch einen kleineren Strahlradius eine Homogenisierung und eine detailärmere Abbildung. Ein größerer Strahlradius sorgt für mehr Details, jedoch entstehen kleine Ringe mit größerer Feldstärke als die umliegenden Bereiche. Eine Begründung für die Entstehung der Ringe konnte nicht gefunden werden. Die detailreichere Abbildung für einen größeren Strahlradius ist in Analogie zur Fourier-Transformation zu betrachten.

Durch eine laterale Verschiebung der Strahlquelle verschlechtert sich das Beugungsbild. Die Größe der sich ergebenden Summe der quadratischen Abweichungen ist unabhängig von der Verschiebungsrichtung, sondern nur vom Betrag der Verschiebung.

Eine Veränderung der Wellenlänge sorgt für eine Verschlechterung des Beugungsbildes. Die Verwendung einer kleineren Wellenlänge ist kritischer als die Verwendung einer größeren Wellenlänge. Für größere Wellenlängen ändert sich die Phasenlage um einen konstanten Faktor. Für kleinere Wellenlängen ist der Faktor aufgrund der Reduktion zu Werten kleiner als  $2 \cdot \pi$  nicht konstant.

Die Untersuchungen konnten zeigen, dass eine Abweichung der Phasenlage des Strahlprofils von einer ebenen Wellenfront größere Auswirkungen besitzt, als eine Änderung des Strahlprofils mit passender Phasenlage. Eine Abweichung der Phasenlage kann im IFTA mit entgegengesetzter Phasenlage weitgehend korrigiert werden.

Eine Wiederholung der DOE-Struktur bringt bei abweichenden Parametern keinen Vorteil. Durch die Wiederholung eines kleinen DOEs, welches für den berechneten Strahlradius viel zu klein ist, kann ein DOE für mehrere verschiedene Strahlradien genutzt werden. Jedes wiederholte DOE erzeugt sein eigenes Beugungsbild, was entsprechend der Lage der Teilstruktur lateral verschoben ist. In hinreichender Entfernung kann die Verschiebung relativ zur Gesamtbildgröße vernachlässigt werden.

Trotz der Abweichungen der untersuchten Parameter ist die gewünschte Struktur des Beugungsbildes in den meisten Fällen immer noch erkennbar und nur bei starker Abweichung ergibt sich ein verschlechtertes Bild. Somit lässt sich zusammengefasst sagen, dass DOE-Strukturen sehr robust und Abweichungen nur einen geringen Einfluss besitzen. In der Praxis sind

die meisten Abweichungen nicht so stark wie in den durchgeführten Tests. Eine Veränderung des Bildes im Vergleich zum idealen Bild ist mit bloßem Auge kaum sichtbar.

Mit Hilfe von Grafikprozessoren kann die Berechnungsdauer erheblich verkürzt werden. Die Berechnung der Ausbreitung des Beugungsbildes ist mit Operatoren in Integralform und auf Basis der Fast Fourier-Transformation möglich. Letztere sind bei gleicher Elementanzahl um mehrere Größenordnungen schneller. Die Verwendung eines Linsenterms ermöglicht die Verwendung eines Operators auf Basis der Fast Fourier-Transformation zur Berechnung der Abbildung einer Linse.

Das Beugungsbild kann mit Hilfe einer Linse scharf abgebildet werden. Das Bild in der Brennebene entspricht einer Abbildung aus dem Unendlichen. Unabhängig von der Lage des DOEs vor der Linse ist die Größe des Beugungsbildes in der Brennebene einer Linse mit der Brennweite  $f'$  nach (4-11) immer konstant. Jeder Abbildungsebene nach der Linse kann über die Abbildungsgleichung eine Ebene vor bzw. nach der Linse zugeordnet werden. Das propagierte Beugungsbild von der DOE- bis zur zugeordneten Ebene wird in der Abbildungsebene sichtbar. In der zugeordneten Ebene muss das Beugungsbild lediglich virtuell vorhanden sein. Das Beugungsbild aus der Brennebene kann mit Hilfe einer zweiten Linse vergrößert oder verkleinert abgebildet werden.

Mit Hilfe des Konfokal-Mikroskops konnte die erzeugte DOE-Struktur in die Simulation übertragen werden. Zusätzlich wurde noch das Strahlprofil in der DOE-Ebene sowie das Spektrum der verwendeten Laserquellen bestimmt. Mit diesen Angaben konnte die Simulation Beugungsbilder berechnen, die den realen Bildern sehr ähnlich sind. Die Ursache für Abweichungen bildet vor allem die ungekannte Phasenlage der Laserquellen.

Die verwendeten HDR-Aufnahmen kommen den Eindruck des menschlichen Auges sehr nahe. Sie entstehen aus einer Bilderserie von über- bis unterbelichteten Bildern. Eine direkte Aufnahme des gesamten Dynamikumfangs des Beugungsbildes ist aufgrund des 8 bzw. 12 Bit Helligkeitsempfinden der Kamera nicht möglich.

Die erzeugte DOE-Struktur weist verschiedene Probleme auf. Diese sind u. a. Leistungsschwankungen des Lasersystems, vorhandene Ablagerungen aufgrund des Ablationsprozesses, ein falscher Abbildungsmaßstab, wodurch sich Stege zwischen den Pixeln bilden und eine Kantenverrundung, ebenfalls bedingt durch den Ablationsprozess, aber auch durch die Reinigung im KOH-Bad.

Aufgrund der Abweichungen von der Idealstruktur ist die 0. Unterordnung sichtbar. Sie ist ein Qualitätsmerkmal wie gut die Struktur erzeugt werden kann, da ihr Auftreten eine Verringerung der Beugungseffizienz bedeutet. Bei einer idealen Struktur tritt die 0. Unterordnung nicht auf. Die Beugungseffizienz kann den Untersuchungen nach als relativer Leistungsanteil einer Unterordnung  $o$  an der Gesamtleistung einer Beugungsordnung  $l$  interpretiert werden.

Die Stege führen zu einer Überlagerung des Beugungsbildes des DOEs mit dem Beugungsbild des Ausgangsstrahlprofils an einem optischen Gitter. Die Nebenmaxima des Gitters besitzen aufgrund ihres prozentualen Leistungsanteils und viel geringeren Fläche eine höhere Intensität als die Beugungsordnungen des DOEs.

Eine Glättung führt nicht zwangsläufig zu einer Verschlechterung des Beugungsbildes. Eine ideale Glättung entspricht einer kontinuierlichen Phasenlage, wodurch die Anzahl an vorhandenen höheren Ordnungen reduziert bzw. diese vollkommen beseitigt werden können.

Die verschiedenen Berechnungsmöglichkeiten wurden durch die hohe Übereinstimmung von Simulation und Experiment verifiziert.

## **Ausblick**

Ziel der weiteren Arbeiten muss die Beseitigung der genannten Herstellungsprobleme sein, um so die Qualität der Strukturen zu erhöhen. Versuche zur Glättung der Strukturen sollten unternommen werden, um die Anzahl der entstehenden höheren Ordnungen zu reduzieren.

Weiterhin müssen die verwendeten Skripte und Funktionen in das wellenoptische Programm implementiert werden. Dazu zählen die Berechnung der DOE, sowie die Veränderung der Parameter. Auch die Implementierung des Imports realer Höhenstrukturen und Strahlprofile gehört zu künftigen Aufgaben. Eine grafische Oberfläche, welche die Steuerung der Parameter ermöglicht, ist ebenfalls nötig.

## I Literaturverzeichnis

- [Bert2009] Bertram, Rene: Diplomarbeit: Fluorlaser-Mikrobearbeitung von ausgewählten Materialien  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2009
- [Bri2005] Brinkmann, Matthias: MikroSystemTechnik 02/2005: Diffraktive Optische Elemente (DOE) ersetzen Linsen und Spiegel  
Darmstadt: GIT Verlag, 2005
- [Cor2012] CORNING CORPORATED: Datenblatt Corning 7980  
URL: [www.corning.com/docs/specialtymaterials/pisheets/H0607\\_hpfs\\_Standard\\_ProductSheet.pdf](http://www.corning.com/docs/specialtymaterials/pisheets/H0607_hpfs_Standard_ProductSheet.pdf)  
verfügbar am: 05.06.2012
- [Dem2006] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik, Band 2: Elektrizität und Optik – 4. Auflage  
Berlin: Springer, 2006
- [DIN2005] Laser und Laseranlagen -  
Prüfverfahren für Laserstrahlmessungen, Divergenzwinkel und Beugungsmaßzahlen -  
Teil 1: Stigmatische und einfach astigmatische Strahlen  
Deutsche Fassung DIN EN ISO 11146-1:2005
- [Gues2005] Guessous, Fouad: Dissertation: Photochemisch strukturierte computergenerierte Hologramme in Bakteriorhodopsin-Schichten  
Marburg: Philipps-Universität Marburg, 2005
- [Has2006] Haselhoff, Sonja: Diplomarbeit: Olfaktorisches Display: Einbindung von Gerüchen in interaktive 3D-Welten  
Hamburg: Universität Hamburg, 2006
- [Held2008] Held, Jürgen: Das Praxisbuch der HDR-Fotografie  
Digitale High-End-Fotografie mit DRI, RAW und Panoramen  
Bonn: Galileo Press, 2008
- [Jahn2012] Jahn, Falko: Masterarbeit: Untersuchung von Methoden und Erstellung eines Programmmoduls zur computergestützten Berechnung von Diffraktiven Optischen Elementen (DOE)  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2012
- [Kres2009] Kress, Bernard: Applied Digital Optics: from micro-optics to nanophotonics – 1. Auflage  
Chichester: Wiley, 2009
- [Loes2009] Löschner, Udo: Script zum Praktikum: Lasergerätetechnik, Versuch: Räumliche und zeitliche Strahleigenschaften  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2009
- [Olb2011] Olbrich, Markus: Forschungsbeleg: Verbesserung und Weiterentwicklung des wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Strahlpropagation

- Mittweida: Hochschule Mittweida, 2011
- [Olb2012] Olbrich, Markus: Forschungsbeleg: Untersuchung der numerischen Eigenschaften wichtiger Propagationsoperatoren  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2012
- [Olb2009] Olbrich, Markus: Bachelorarbeit: Erstellung eines wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Laserstrahlpropagation nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2009
- [Ped2005] Pedrotti, Frank: Optik für Ingenieure – 3. Auflage  
Berlin: Springer, 2005
- [Petz2009] Petzold, Uwe: Masterarbeit: Laserstrahlformung mittels diffraktiver optischer Elemente  
Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2009
- [Sch2001] Schäfer, Dirk: Dissertation: Diffraktive Phasenelemente für partiell-kohärente UV-Laserstrahlung  
Göttingen: Georg-August-Universität, 2001
- [Schu2004] Schumacher, Thomas: Examensarbeit: Zur Bedeutung der Parameter von Sehfunktionsstörungen  
München: GRIN-Verlag, 2004
- [Spe2008] Speckmann, Erwin-Josef: Physiologie – 5. Auflage  
München: Elsevier GmbH, 2008
- [Stan2002] Stankovic, Svetomir: Dissertation: Diffraktive Optische Elemente für moderne mikrooptische Systeme  
Darmstadt: Technischen Universität Darmstadt, 2002
- [Trä2007] Träger, Frank: Handbook of Lasers and Optics – 1. Auflage  
New York: Springer, 2007
- [Wes2011] Westermann, Thomas: Mathematik für Ingenieure – 6. Auflage  
Berlin: Springer, 2011



## II Anhang

### Herleitung der Veränderung der Diskretisierungsstufen für $\lambda_{Abb}$

Gegeben sind die erzeugten Höhenkoordinaten  $Z_{DOE}$ . Insgesamt existieren  $p_{IFTA}$  Höhenstufen  $h = 0 \dots h_{Max}$ , welche konstant sind. Jede Höhenstufe wurde so erzeugt, dass sie für die Wellenlänge  $\lambda_{IFTA}$  eine Phasendifferenz von:

$$\text{Phasendifferenz} \quad \Delta\varphi(q) = \frac{q}{p_{IFTA}} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{IFTA}} \cdot (n_S - n_L) \cdot h(q+1) \quad (\text{A } 1)$$

hervorruft (vgl. (5-1)). Die Variable  $q$  steht für die jeweilige Höhenstufe und kann Werte von 0 bis  $p_{IFTA} - 1$  annehmen. Durch Umstellen von (A 1) nach  $h(q+1)$  ergibt sich:

$$\text{Maximaler Höhenunterschied} \quad h(q+1) = \frac{q}{p_{IFTA}} \cdot \frac{\lambda_{IFTA}}{(n_S - n_L)} \quad (\text{A } 2)$$

Auch bei der Verwendung einer anderen Wellenlänge  $\lambda_{Abb}$  ändern sich die Höhenstufen nicht.  $q$  kann demnach nur die gleichen Werte einnehmen. Die Beziehung (A 2) kann analog für eine andere Wellenlänge aufgestellt werden. Die Formulierungen werden anschließend gleich gesetzt.

$$h(q+1) = \frac{q}{p_{Abb}} \cdot \frac{\lambda_{Abb}}{(n_S - n_L)} \quad (\text{A } 3)$$

$$\frac{q}{p_{Abb}} \cdot \frac{\lambda_{Abb}}{(n_S - n_L)} = \frac{q}{p_{IFTA}} \cdot \frac{\lambda_{IFTA}}{(n_S - n_L)} \quad (\text{A } 4)$$

Theoretisch mögliche Anzahl an Höhenstufen mit der Wellenlänge  $\lambda_{Abb}$

$$p_{Abb} = p_{IFTA} \cdot \frac{\lambda_{Abb}}{\lambda_{IFTA}} \quad (\text{A } 5)$$

Für die maximale Phasendifferenz der Wellenlänge  $\lambda_{Abb}$  ergibt sich nach (A 1) zusammen mit (A 5):

$$\Delta\varphi(q = p_{IFTA}) = \frac{p_{IFTA}}{p_{Abb}} \cdot 2 \cdot \pi = \frac{\lambda_{IFTA}}{\lambda_{Abb}} \cdot 2 \cdot \pi \quad (\text{A } 6)$$



## **Danksagung**

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Niederschrift unterstützt und ihre eigene Zeit geopfert haben.

Als erstes möchte ich bei meinen betreuenden Professoren, Herrn Prof. Dr. rer. nat. Andreas Fischer und Herrn Prof. Dr. rer. nat. Bernhard Steiger insbesondere für das sehr interessante Thema und die vielen Freiheiten, die ich bei der Bearbeitung genießen durfte, bedanken. Das Thema verband die Bereiche der Physik, Mathematik und Informatik und brachte mir sogar einen kleinen Einblick in das Gebiet der Fotografie. Weiterhin fanden meine Fragen und Probleme immer ein offenes Ohr.

Auch meinen Freunden und Kollegen gebührt großer Dank. Egal ob Messaufgaben oder das Korrekturlesen, auf sie war immer Verlass. Ein besonderer Dank gilt hier Herrn Falko Jahn. Die Diskussionen mit ihm brachten immer neue Ideen hervor, wodurch aber auch der Umfang meiner Arbeit stark angewachsen ist.

Ein großes Dankeschön für ihr Verständnis und Hilfe möchte ich auch meiner Freundin Melanie aussprechen. Besonders in der letzten Phase war die Zeit mit mir nicht immer leicht und uns blieb nicht viel gemeinsame Zeit. Vielen Dank für die Unterstützung und ich verspreche Besserung!



## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Geringswalde, den 01.07.2012

Markus Olbrich

---

# **Abschlussbericht**

## **Forschungs- und**

## **Entwicklungsprojekt I**

---

**Markus Olbrich**

### **Verbesserung und Weiterentwicklung des wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Strahlpropagation**

Forschungs- und Entwicklungsprojekt I  
Wintersemester 2010/2011 – Sommersemester 2011  
Prof. Dr. rer. nat. A. Fischer

Fakultät Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik  
Mittweida, 25.10.2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Berechnungsalternativen.....</b>	<b>2</b>
2.1	Theoretische Betrachtungen.....	2
2.1.1	Das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral .....	3
2.1.2	Das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral.....	3
2.1.3	Die Fresnel-Näherung .....	4
2.1.4	Die Fraunhofer-Näherung .....	7
2.1.5	Das Winkelspektrum ebener Wellen.....	7
2.2	Untersuchungen und Ergebnisse .....	8
2.2.1	Interpolation auf der Zielfläche.....	8
2.2.2	Untersuchung der Berechnungsdauer verschiedener Prozessoren und Grafikkarten .....	12
2.2.3	Verwendung Single- und Double-Precision.....	16
2.2.3.1	Ausbreitung im Freiraum .....	16
2.2.3.2	Bestimmung der maximal möglichen Elementgröße für Single-Precision .....	17
2.2.4	Geeignete Grafikkarten .....	20
2.2.5	Berechnungsdauer der verschiedenen Berechnungsalternativen.....	22
2.2.6	Korrektheit der Ergebnisse.....	25
<b>3</b>	<b>Charakterisierung der Strahlqualität .....</b>	<b>28</b>
3.1	Theoretische Betrachtungen.....	28
3.1.1	Momente 1. Ordnung .....	28
3.1.2	Momente 2. Ordnung .....	28
3.1.3	Weitere Strahlparameter.....	30
3.2	Die Strahldiagnosesoftware .....	32
3.2.1	Bedienung und Berechnungsmöglichkeiten.....	32
3.2.2	Verschiedene Methoden zur Radiusberechnung .....	35
3.2.2.1	2. Moment .....	36
3.2.2.2	$1/e^2$ Intensitätsabfall .....	36
3.2.2.3	Gaußfit .....	37
3.2.2.4	86,5 % Leistungseinschluss im Querschnitt (Knife Edge).....	38
3.2.2.5	86,5 % Leistungseinschluss als Kreis um den Schwerpunkt (Encircled Power) .....	39
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>41</b>
I.	Literaturverzeichnis.....	43

## Abbildungsverzeichnis

<b>Abb. 2-1</b> Schematische Darstellung der Abstrahl- und Zielfläche sowie des Abstandes der Elemente.....	2
<b>Abb. 2-2</b> Schematische Darstellung der beinhalteten Winkel des Neigungsfaktors $N$ .....	3
<b>Abb. 2-1</b> Visualisierung Beispiel 2.....	9
<b>Abb. 2-2</b> Darstellung der relativen Berechnungsdauer in % in Abhängigkeit von der zu interpolierenden Elementanzahl mit jeweils linearer Regression .....	10
<b>Abb. 2-3</b> Darstellung der relativen Abweichungen der berechneten Radien mit Interpolation in % in Abhängigkeit von der zu interpolierenden Elementanzahl.....	11
<b>Abb. 2-4</b> Darstellung des Realteils der elektrischen Feldstärke auf der 1. Grenzfläche von Beispiel 3, links: keine Interpolation, rechts: 90 % zu interpolierende Elemente.....	12
<b>Abb. 2-5</b> Darstellung der Intensität für die 1. und 2. Grenzfläche aus Beispiel 3 mit 90 % zu interpolierenden Elementen, links: 1. Grenzfläche, rechts: 2. Grenzfläche .....	12
<b>Abb. 2-6</b> Darstellung der benötigten Berechnungsdauer der verschiedenen Grafikkarten mit Single-Precision in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression .....	14
<b>Abb. 2-7</b> Darstellung der benötigten Berechnungsdauer der verschiedenen Rechner und Grafikkarten mit Double-Precision in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression.....	15
<b>Abb. 2-8</b> Vergleich der Berechnungsdauer für Single- und Double Precision der verschiedenen Rechner und Grafikkarten in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression.....	16
<b>Abb. 2-9</b> Darstellung der erhaltenen Intensitätsprofile auf der Zielfläche für die Ausbreitung im Freiraum für verschiedene Elementgrößen auf der Abstrahlfläche .....	17
<b>Abb. 2-10</b> Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Abstand $\Delta z$ der Grenzflächen für Single- und Double-Precision .....	18
<b>Abb. 2-11</b> Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Strahlradius $w_{86}$ auf der Abstrahlfläche für Single- und Double-Precision.....	19
<b>Abb. 2-12</b> Darstellung der Abhängigkeit der erreichten Floating Point (Gleitkomma) Performance mit Double Precision in Abhängigkeit der Matrizengröße .....	20
<b>Abb. 2-13</b> Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungsdauer für Varianten mit Summation und diskreter Fourier-Transformation .....	23
<b>Abb. 2-14</b> Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungsdauer für Varianten mit Fast Fourier-Transformation.....	24



---

<b>Abb. 2-15</b> Darstellung der Beschleunigung mit der Fresnel-Näherung auf Basis der FFT gegenüber verschiedenen anderen Varianten .....	24
<b>Abb. 2-16</b> Darstellung der relativen Abweichungen des auf Basis des 2. Momentes bestimmten Strahlradius zum theoretischen Wert für alle Varianten außer der Fraunhofer-Näherung .....	26
<b>Abb. 2-17</b> Darstellung der relativen Abweichungen der bestimmten maximalen Feldstärken für alle Varianten außer Verfahren mittels DFT .....	27
<b>Abb. 3-18</b> Darstellung der zu ermittelnden Ortsparameter .....	30
<b>Abb. 3-1</b> Fenster für die Eingabe wichtiger Parameter .....	33
<b>Abb. 3-2</b> Programmoberfläche nach dem Einlesevorgang .....	34
<b>Abb. 3-3</b> Programmoberfläche für manuelle Bearbeitung .....	35
<b>Abb. 3-4</b> ermittelte Radien für $1/e^2$ Intensitätsabfall .....	36
<b>Abb. 3-5</b> mittels Gaußfit bestimmtes Gaußprofil sowie Radius .....	38
<b>Abb. 3-6</b> Eingeschlossenes Strahlprofil bei 86,5 % Gesamtleistung in Richtung der beiden Hauptachsen .....	39

## Tabellenverzeichnis

<b>Tab. 2-1</b> Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 1.....	9
<b>Tab. 2-2</b> Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 2.....	9
<b>Tab. 2-3</b> Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 3.....	10
<b>Tab. 2-4</b> Technische Daten der verwendeten Rechner .....	13
<b>Tab. 2-5</b> Technische Daten der verwendeten Grafikkarten .....	13
<b>Tab. 2-6</b> Verwendete Parameter für die Ausbreitung im Freiraum .....	16
<b>Tab. 2-7</b> Verwendete Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Abstand $\Delta z$ .....	18
<b>Tab. 2-8</b> Verwendete Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Strahlradius $w_{86}$ auf der Abstrahlfläche.....	19
<b>Tab. 2-9</b> Technische Daten möglicher geeigneter Grafikkarten.....	21
<b>Tab. 2-10</b> Verwendete Parameter zur Untersuchung der Berechnungsdauer der einzelnen Berechnungsalternativen .....	22
<b>Tab. 2-11</b> Einteilung der Berechnungsalternativen in drei Gruppierungen.....	22

## Formelverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Maßeinheit
<i>Skalare Größen</i>		
$a, b, c$	Parameter des Parabelfits	m
$A_0$	Startfläche	m <sup>2</sup>
$A_1$	Zielfläche	m <sup>2</sup>
$D_x, D_y$	Abmessungen in $x$ -und $y$ -Richtung	m
$E_0$	Amplitude der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$E_1$	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
$E_{S0}$	Einfallende elektrische Feldstärke auf der Abstrahlfläche	$\frac{V}{m}$
$f(x), g(x)$	Mathematische Funktionen zur Erklärung einer Faltung	—
$i$	Imaginäre Einheit	—
$I$	Intensität	$\frac{W}{m^2}$
$I_0$	Amplitude der Intensität	$\frac{W}{m^2}$
$k_0$	Wellenzahl der elektromagnetischen Welle	m <sup>-1</sup>
$k_x, k_y, k_z$	Wellenzahlen in den verschiedenen Raumrichtungen	m <sup>-1</sup>
$M^2$	Beugungsmaßzahl	—
$n_0$	Brechzahl zwischen Abstrahl- und Zielfläche	—
$N(x_0, y_0, z_0)$	Neigungsfaktor	—
$N_x, N_y$	Elementanzahl in $x$ -und $y$ -Richtung	—
$P$	Im Strahlprofil enthaltene Leistung	W

$r$	Abstand von einem Abstrahl- zu einem Zielelement	m
$R$	Krümmungsradius einer sphärischen Fläche	m
$R_{aperture}$	Begrenzungsradius auf der Zielfläche	m
$w_{86}$	Strahlradius auf Basis von 86,5 % Leistungseinschluss	m
$w_{\sigma x}$	Strahlradius auf Basis des 2. Momentes in $x$ -Richtung	m
$w(z)$	Strahlradius an einer Position $z$	m
$x_0, y_0, z_0$	Kartesische Koordinaten der Abstrahlfläche	m
$x_1, y_1, z_1$	Kartesische Koordinaten der Zielfläche	m
$\bar{x}, \bar{y}$	Schwerpunkt in $x$ - bzw. $y$ -Richtung	m
$\Delta x, \Delta y$	Elementgröße in $x$ - bzw. $y$ -Richtung	m
$\Delta z$	Abstand der planen Flächen $A_0$ und $A_1$	m
$\varepsilon$	Elliptizität	—
$\lambda_0$	Vakuumwellenlänge der elektromagnetischen Welle	m
$\sigma_x^2, \sigma_y^2$	2. Moment in $x$ - bzw. $y$ -Richtung	m
$\sigma_{xy}^2$	Gemischtes 2. Moment	m
$s\lambda$	Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge	—
$\nu_x, \nu_y$	Raumfrequenzen im Spektralraum	$\text{m}^{-1}$
$\Delta \nu_x, \Delta \nu_y$	Elementgröße der Raumfrequenzen in $x$ - und $y$ -Richtung	m
$\varphi$	Azimutwinkel	°, rad

### Vektoren

$\vec{e}_r$	Einheitsvektor des Vektors $\vec{r}$	—
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor der einfallenden elektromagnetischen Welle	m

$\vec{n}_0$	Einheitsvektor der Flächennormalen $\vec{n}$ der Abstrahlfläche	—
$\vec{n}$	Flächennormalen der Abstrahlfläche	m
$\vec{r}$	Verbindungsvektor Abstrahl- Zielelement	m

Quellcodeauszüge

Eges	Berechnete elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
Ei	Imaginärteil der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
Er	Realteil der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
p	Vektor mit Koeffizienten eines Polynomfits	—
x1	x-Koordinaten der Zielfläche	m
xg	x-Koordinaten der Zielfläche mit kleinerem Elementabstand	m

Berechnungsvorschriften

$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation	—
$\mathcal{F}^{-1}$	Fourier-Transformation	—

## 1 Einleitung

Im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsmoduls des 1. und 2. Semesters wurden umfangreiche Untersuchungen und Literaturrecherchen durchgeführt um Berechnungsalternativen zu finden sowie die bisherigen Berechnungen zu verbessern. Aufgrund der noch eingeschränkten Funktionalität der wellenoptischen Berechnungen auf der Basis des Kirchhoff-Fresnelschen Beugungsintegrals durch die benötigte Berechnungsdauer sowie der benötigten Speichermenge [Olb2010] standen Verfahren, welche mit Hilfe der Fourier-Transformation ausgeführt werden können, im Fokus. Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit bestand in der Verwendung einer Interpolation der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche um so die Anzahl der zu berechnenden Elemente zu verringern.

Ebenso wurde die Verwendung unterschiedlicher Datentypen getestet um deren Einfluss auf das Berechnungsergebnis zu bestimmen. Verschiedene Berechnungen auf unterschiedlichen Rechnern und sowie Grafikkarten wurden ebenfalls durchgeführt um das geeignetste System zur Berechnung zu bestimmen.

Ein Großteil der aufgewandten Arbeitszeit wurde parallel in die Erstellung einer Software zur Strahldiagnose investiert. Aufgrund der notwendigen Charakterisierung der Strahlqualität des im Verbundprojekt FASKAN entstandenen Faserlasers wurde eine Auswertesoftware benötigt. Mit Hilfe dieser Software wird in weiteren Programmversionen der Import realer Strahlprofile möglich sein.

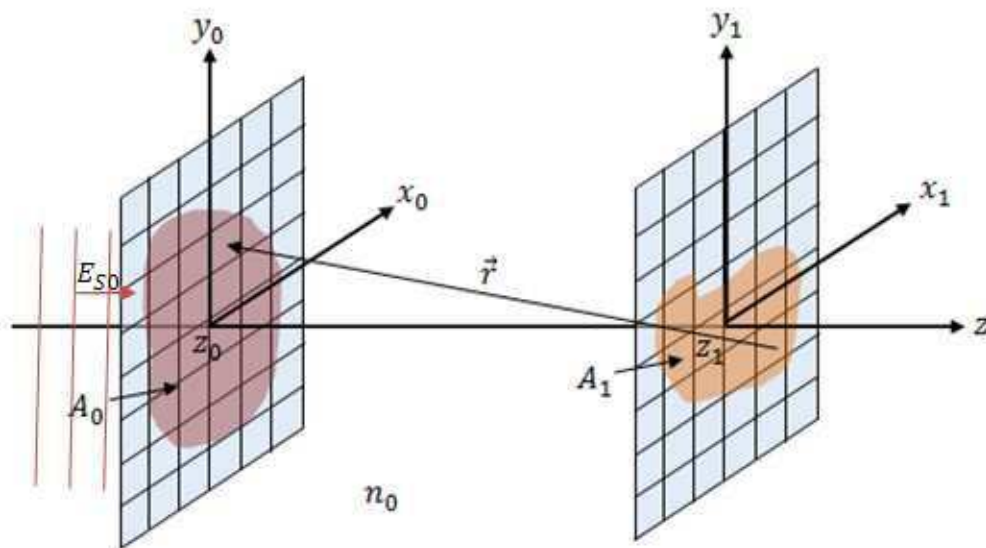
Da sich die beiden Themenschwerpunkte Berechnungsalternativen und Strahldiagnosesoftware stark unterscheiden, wurde diese Arbeit in zwei Teile gegliedert um die inhaltliche Geschlossenheit der Themengebiete besser zu gewährleisten.

## 2 Berechnungsalternativen

### 2.1 Theoretische Betrachtungen

In diesem Kapitel sollen die wichtigsten theoretischen Grundlagen kurz dargelegt und erläutert werden. Auf genauere Herleitungen sowie Erläuterungen wird dabei weitgehend verzichtet. Diese sind entweder in den angegebenen Literaturverweisen zu finden oder sollen Gegenstand nachfolgender Arbeiten sein.

Im Folgenden wird eine auf eine beliebig geformte Fläche  $A_0$ , an einer Position  $z = z_0$  mit dem eigenen kartesischen Koordinatensystem  $x_0, y_0$ , einfallende elektromagnetische Welle mit der elektrischen Feldstärke  $E_{s0}$  betrachtet (siehe **Abb. 2-1**). Die Fläche  $A_0$  wird im Weiteren auch als Abstrahlfläche bezeichnet, da nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip jeder Punkt, der von einer Wellenfront erfasst wird als Ausgangspunkt einer Elementarwelle dient. Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke  $E_1$  auf einer Fläche  $A_1$ , an einer Position  $z = z_1$  mit dem eigenen kartesischen Koordinatensystem  $x_1, y_1$ , stehen verschiedene Möglichkeiten bzw. Formulierungen des Beugungsintegrals zur Verfügung, welche in den nachfolgenden Unterkapiteln näher erläutert werden.



**Abb. 2-1** Schematische Darstellung der Abstrahl- und Zielfläche sowie des Abstandes der Elemente

### 2.1.1 Das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral

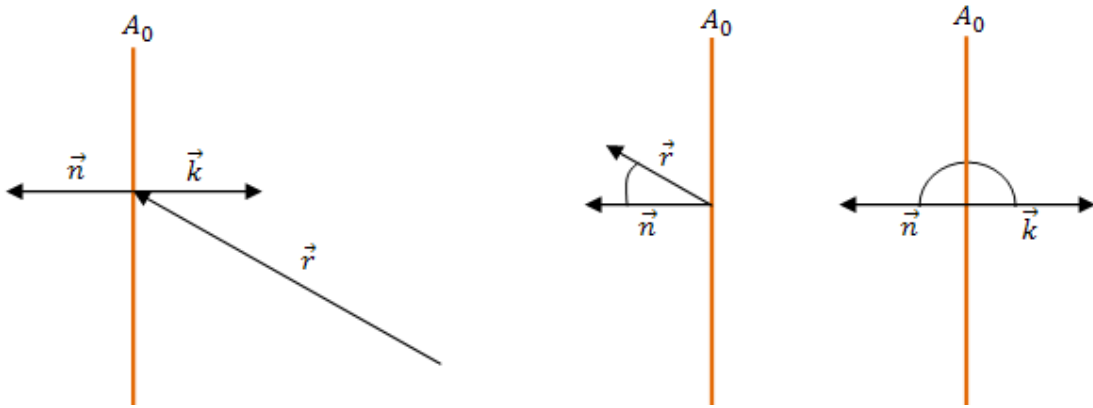
Gegeben sei ohne zusätzliche Erläuterungen die Formulierung nach Kirchhoff und Fresnel durch [Olb2010]:

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \cdot \iint_{A_0} \frac{E_{S0}(x_0, y_0, z_0)}{r} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r} \cdot N(x_0, y_0, z_0) dA_0 \quad (2-1)$$

mit  $N(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} (\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) - \cos(\vec{n}_0, \vec{k}))$

und  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

Die verwendeten Vektoren und die sich dabei ergebenden Winkel des Neigungsfaktors  $N$  sind in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



**Abb. 2-2** Schematische Darstellung der beinhalteten Winkel des Neigungsfaktors  $N$

Unter der Bedingung, dass die Flächen  $A_0$  und  $A_1$  Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $z$  darstellen sowie, dass auf der Fläche  $A_0$  eine ebene Wellenfront vorliegt, wodurch die Flächennormale  $\vec{n}$  und der Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  antiparallel ausgerichtet sind, ergibt sich für den Neigungsfaktor  $N$ :

$$N(x_0, y_0, z_0) = N(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta z}{r} + 1 \right) \quad (2-2)$$

mit  $\Delta z = z_1 - z_0$ ;  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + \Delta z^2}$

### 2.1.2 Das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral

Die Formulierung des Beugungsintegrals nach Rayleigh und Sommerfeld gleicht in etwa der von Kirchhoff und Fresnel, jedoch sind die Bedingungen in der Herleitung etwas anders und die



Integration erfolgt über den gesamten Raum statt nur über Apertur der Fläche  $A_0$ . Durch geeignete Definition der elektrischen Feldstärke mit:

$$E_{S0}(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} E_{S0} & \text{für } x_0, y_0, z_0 \in A_0 \\ 0 & \text{für } x_0, y_0, z_0 \notin A_0 \end{cases} \quad (2-3)$$

kann die strenge Annahme der Integration über den gesamten Raum jedoch vernachlässigt werden und die Integration muss auch hier, wie für **(2-1)**, nur über Fläche  $A_0$  durchgeführt werden. Weiterhin beinhaltet die Formulierung einen anderen Neigungsfaktor, wodurch sich folgende Form ergibt [Born1999]:

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{A_0} E_{S0} \cdot \frac{(1 - i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r) \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r}}{r^2} \cdot N(x_0, y_0, z_0) \, dA_0 \quad (2-4)$$

mit  $N(x_0, y_0, z_0) = \cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r)$

und  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

Unter den bereits unter **2.1.1** eingeführten Bedingungen folgt für den Neigungsfaktor:

$$N(x_0, y_0, z_0) = N(x_0, y_0) = \frac{\Delta z}{r} \quad (2-5)$$

mit  $\Delta z = z_1 - z_0$ ;  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + \Delta z^2}$

Für den Faktor  $(1 - i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r)$  gilt bei hinreichend großen Abstand  $r$  (etwa ab  $100\lambda$ ):

$$(1 - i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r) \approx -i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r$$

wodurch **(2-4)** die Form von **(2-1)** annimmt.

### 2.1.3 Die Fresnel-Näherung

Befindet sich die Zielfläche  $A_1$  in hinreichend großer Entfernung  $\Delta z$  von der Fläche  $A_0$ , so dass die Abmessungen  $x_0$  und  $y_0$  klein gegenüber  $\Delta z$  sind, so lässt sich der Abstand  $r$  in einer Taylorreihe entwickeln [Dem2006]:

$$r \cong \Delta z \cdot \left( 1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2\Delta z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2\Delta z^2} \right) \quad (2-6)$$

Weiterhin gilt unter dieser Bedingung:  $N \cong 1$ , wodurch **(2-1)** wie folgt geschrieben werden kann:

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \iint_{A_0} \frac{E_{S0}}{\Delta z \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2\Delta z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2\Delta z^2}\right)} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2\Delta z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2\Delta z^2}\right)} dA_0 \quad (2-7)$$

Aufgrund der großen Entfernung  $\Delta z$  in Bezug auf die Abmessungen der Fläche  $A_0$  kann der Faktor  $\frac{1}{\Delta z \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2\Delta z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2\Delta z^2}\right)}$  zu  $\frac{1}{\Delta z}$  zusammen gefasst werden. Im Exponenten ist die Vereinfachung nicht möglich, da bereits kleine Änderungen der Phase große Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

$$E_1 \cong \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \iint_{A_0} \frac{E_{S0}}{\Delta z} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z \cdot \left(1 + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2\Delta z^2} + \frac{(y_0 - y_1)^2}{2\Delta z^2}\right)} dA_0 \quad (2-8)$$

Durch Auflösung der binomischen Terme im Exponenten sowie dem Vorziehen aller integrationsunabhängigen Variablen vor das Integral, ergibt sich die Fresnel-Näherung in Integralform:

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left(\Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2\Delta z}\right)}}{\Delta z} \iint_{A_0} E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} \cdot (x_0^2 + y_0^2)} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} \cdot (x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_0 dy_0 \quad (2-9)$$

Wird die Integration über den gesamten Raum durchgeführt, ähnelt (2-9) einer zweidimensionalen Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}(f(x, y)) = F(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi i (v_x \cdot x + v_y \cdot y)} dx dy \quad (2-10)$$

wobei für die Raumfrequenzen im Falle einer Diskretisierung gilt [Trä2007]:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x = \frac{1}{N_x} \quad \Delta x = \frac{D_x}{N_x - 1} \quad v_x = -\frac{N_x}{2} \Delta v_x \dots \frac{N_x}{2} \Delta v_x \quad (2-11)$$

Wobei  $N_x$  die Anzahl der Elemente in  $x$ -Richtung darstellt. Im Falle (2-9) können nicht die „normalen“ Raumfrequenzen verwendet werden. Die Raumfrequenzen werden durch:

$$v_x = \frac{n_0 \cdot k_0}{2\pi \cdot \Delta z} x_1 = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} x_1 \quad v_y = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} y_1 \quad (2-12)$$

gebildet. Vereinfacht geschrieben ergibt sich somit die Fresnel-Näherung mittels Fourier-Transformation:

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F} \left( E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0^2 + y_0^2)} \right) \quad (2-13)$$

Werden die binomischen Terme in (2-7) hingegen nicht ausmultipliziert und nur die von der Integration unabhängigen Variablen vor das Integral gezogen, folgt durch Vertauschen von  $x_0$  und  $x_1$  bzw.  $y_0$  und  $y_1$ :

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z}}{\Delta z} \cdot \iint_{A_0} E_{S0} \cdot e^{\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{2 \Delta z} ((x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2)} dx_0 dy_0 \quad (2-14)$$

Diese Form entspricht mathematisch einer Faltung:

$$(f * g)(x_1) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x_0) \cdot g(x_1 - x_0) dx_0 \quad (2-15)$$

Demnach kann das Faltungstheorem angewendet werden:

$$(f * g)(x_1) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f(x_0)) \cdot \mathcal{F}(g(x_0)))] \quad (2-16)$$

Wobei  $\mathcal{F}^{-1}$  die inverse Fourier-Transformation darstellt. Die Funktion  $g$  hat demnach die nachfolgende Gestalt:

$$g(x_0, y_0) = e^{\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{2 \Delta z} (x_0^2 + y_0^2)} \quad (2-17)$$

und für deren Fouriertransformierte gilt [Trä2007]:

$$\mathcal{F}(g(x_0, y_0)) = \frac{i \cdot \lambda_0 \cdot \Delta z}{n_0} e^{-i \pi \frac{\lambda_0 \cdot \Delta z}{n_0} (v_x^2 + v_y^2)} \quad (2-18)$$

Somit ergibt sich schließlich die Fresnel-Näherung im Spektralraum:

$$E_1 = e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}(E_{S0}) \cdot e^{-i \pi \frac{\lambda_0 \cdot \Delta z}{n_0} (v_x^2 + v_y^2)} \right] \quad (2-19)$$

Für die Raumfrequenzen gelten die Beziehungen unter (2-11).

### 2.1.4 Die Fraunhofer-Näherung

Damit diese Näherung angewendet werden kann, muss sich die Zielfläche  $A_1$  in noch größerer Entfernung von der Abstrahlfläche  $A_0$  befinden als bei der Fresnel-Näherung. Aufgrund des großen Abstandes kann der Term:

$$e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0^2 + y_0^2)}$$

in (2-9) vernachlässigt werden, wodurch die Fraunhofer-Näherung in Integralform gewonnen wird:

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \iint_{A_0} E_{S0} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_0 dy_0 \quad (2-20)$$

In Analogie zur Herleitung von (2-13) kann die Berechnung ebenfalls mittels Fourier-Transformation erfolgen:

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F}(E_{S0}) \quad (2-21)$$

Die Raumfrequenzen werden nach (2-12) gebildet.

### 2.1.5 Das Winkelspektrum ebener Wellen

Diese Formulierung beruht auf der Tatsache, dass die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen einen Vektorcharakter besitzt, wobei jede Komponente ( $E_x, E_y, E_z$  mit  $k_x, k_y, k_z$ ) separat als ebene Welle betrachtet werden kann und durch

$$|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi \cdot n_i}{\lambda_0} \quad (2-22)$$

miteinander verbunden ist. Die elektrische Feldstärke auf der Zielfläche lässt sich durch die folgende Formulierung berechnen [Trä2007]:

$$E_1 = \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}(E_{S0}) \cdot e^{2\pi i \cdot \Delta z \cdot \sqrt{\frac{n_0^2}{\lambda_0^2} - (v_x^2 + v_y^2)}} \right) \quad (2-23)$$

Die Raumfrequenzen werden nach (2-11) berechnet.

## 2.2 Untersuchungen und Ergebnisse

### 2.2.1 Interpolation auf der Zielfläche

Aufgrund der z.T. sehr langen Berechnungsdauer bei sehr großen Ausdehnungen der einzelnen Grenzflächen wurde nach Wegen gesucht um die zu berechnenden Elemente zu reduzieren. Die Elementanzahl bzw. die Elementgröße auf der Abstrahlfläche bei Verwendung des Kirchhoff-Fresnelschen Beugungsintegrals wird nach folgender Formel bestimmt [Olb2010]:

$$s_{\lambda} = 0,2553 \cdot \frac{\Delta z}{w_{86}} \quad (2-24)$$

Daher ist diese Elementanzahl vorgegeben und nur die Elementanzahl auf der Zielfläche kann reduziert werden. Für eine nachfolgende Abstrahlung von der Zielfläche, wird wieder die maximale Elementgröße nach (2-24) benötigt, wodurch auch diese Elementgröße weitgehend vorgegeben ist. Mit Hilfe einer Interpolation kann die Berechnung für weniger Elemente erfolgen und anschließend die noch benötigten Elemente interpoliert werden. Dazu wird die bereits in MATLAB implementierte kubische Spline-Interpolation genutzt.

Der Algorithmus dazu ist sehr einfach. Zunächst wird für weniger Elemente auf der Zielfläche die elektrische Feldstärke berechnet und in Real- und Imaginärteil getrennt. Für jeden Anteil wird anschließend eine Spline-Interpolation durchgeführt.

```
Er=real(Eges);
Ei=imag(Eges);
Eges=spline(xl,Er,xg)+1i*spline(xl,Ei,xg);
```

Von großer Bedeutung ist die Kenntnis für wie viele Elemente auf der Zielfläche eine Berechnung erfolgen muss, ohne dass sich nennenswerte Abweichungen zur Berechnung ohne Interpolation ergeben. Für die Untersuchung dieses Sachverhaltes wurden die nachfolgenden Beispiele bzw. Ausbreitungsfälle gewählt.

Um einen deutlichen Vorteil der Interpolation zu erkennen, wurden Beispiele mit relativ vielen enthaltenen Elementen gewählt. Die Parameter für diese Beispiele sind in den Tabellen **Tab. 2-1** bis **Tab. 2-3** dargestellt. Beispiel 1 zeigt die Ausbreitung im Freiraum von einer Startebene auf eine Abbildungsfläche. In den Beispielen 2 und 3 wurde noch jeweils eine Linse zwischen Start- und Abbildungsfläche eingebracht und der Strahlradius auf der Startfläche variiert. Um den Einfluss der Interpolation zu zeigen, wurden die zu berechnenden Elementanzahlen immer um jeweils 5 bzw. 10 % von der Ausgangszahl reduziert und für das Ergebnis die sich ergebende relative Berechnungsdauer in Bezug auf 0 % zu interpolierende

Elemente sowie die relativen Radiusabweichungen auf der Basis des 2. Momentes berechnet. Die Ergebnisse für die Beschleunigungen sind in **Abb. 2-2** dargestellt.

### Beispiel 1: Ausbreitung im Freiraum

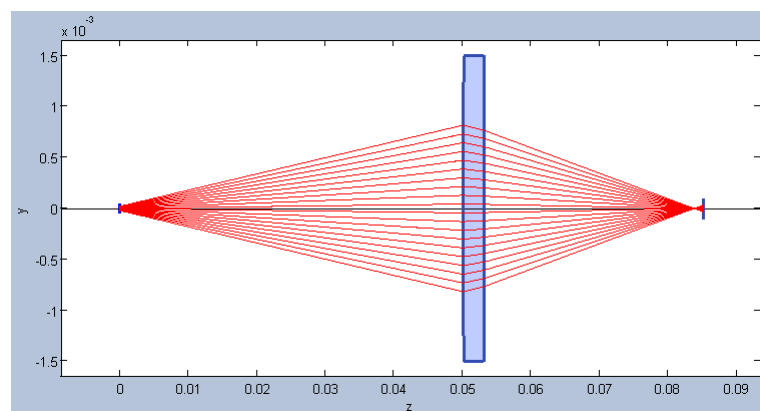
Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 1,5 \text{ mm}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 3 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 50 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 3 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25\lambda$ $n_1 = 1$

**Tab. 2-1** Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 1

### Beispiel 2: Ausbreitung durch Linse und anschließende Abbildung

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 20 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 50 \mu\text{m}$ Elementgröße: $0,5\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Sphäre $R = 10 \text{ mm}$ $z_1 = 50 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 1,5 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25 \mu\text{m}$ $n_1 = 1,5$ Abstrahlung: Linie
2. Grenzfläche	Abbildungsfläche	
Ebene $z_2 = 53 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 1,5 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25 \mu\text{m}$ $n_2 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_3 = 85 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 0,2 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25\lambda$ $n_3 = 1$	

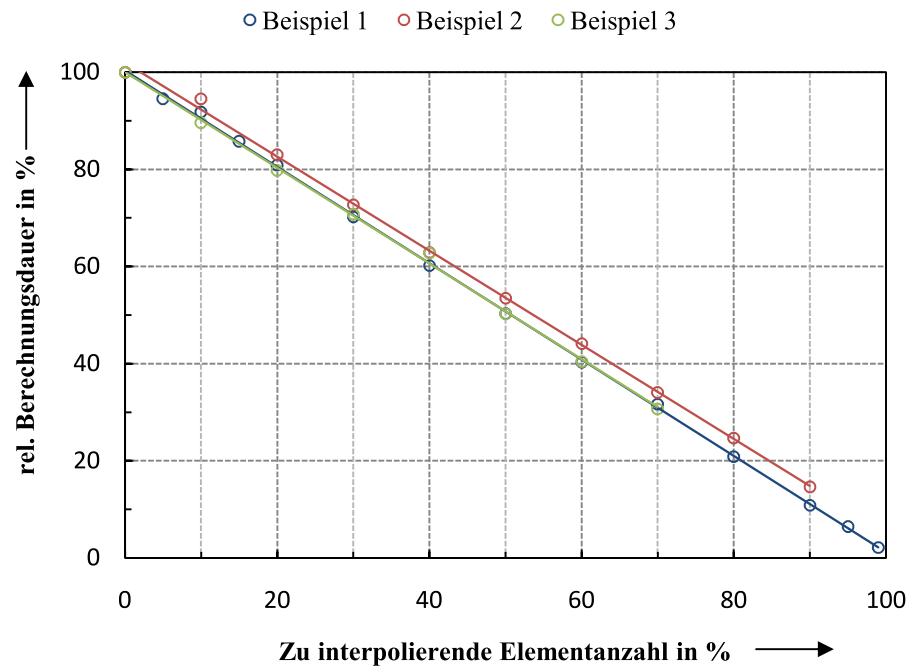
**Tab. 2-2** Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 2



**Abb. 2-1** Visualisierung Beispiel 2

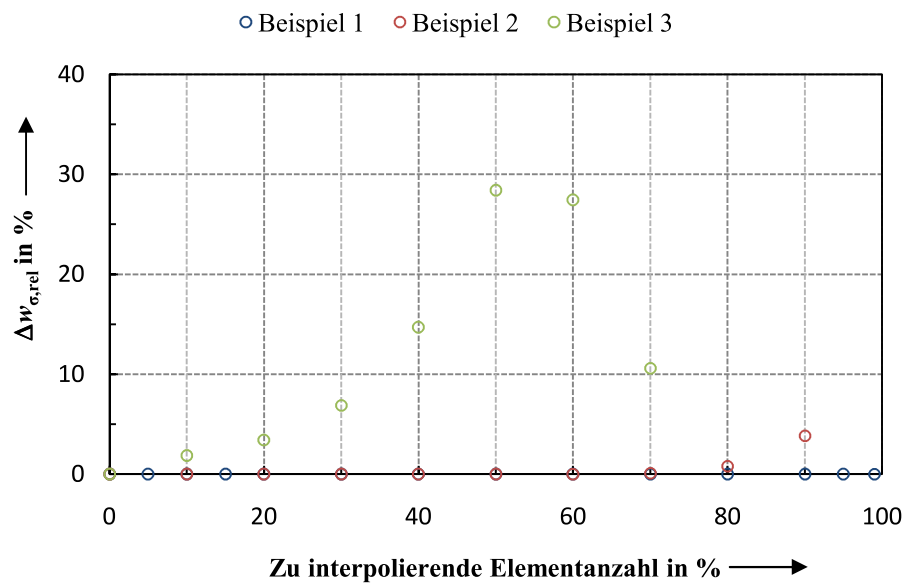
**Beispiel 3: Ausbreitung durch Linse und anschließende Abbildung**

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 5 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 15 \mu\text{m}$ Elementgröße: $0,1\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Sphäre $R = 10 \text{ mm}$ $z_1 = 50 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 6 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25 \mu\text{m}$ $n_1 = 1,5$ Abstrahlung: Linie
2. Grenzfläche	Abbildungsfläche	
Ebene $z_2 = 53 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 6 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25 \mu\text{m}$ $n_2 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_3 = 85 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 1 \text{ mm}$ Elementgröße: $0,25\lambda$ $n_3 = 1$	

**Tab. 2-3** Parameter zur Untersuchung der Interpolationsmöglichkeiten: Beispiel 3**Abb. 2-2** Darstellung der relativen Berechnungsdauer in % in Abhängigkeit von der zu interpolierenden Elementanzahl mit jeweils linearer Regression

**Abb. 2-2** zeigt deutlich einen linearen Zusammenhang zwischen zu interpolierenden Elementen und der damit verbundenen Rechenzeit. Eine Interpolation kann demnach zu einer deutlichen Verkürzung der benötigten Berechnungsdauer führen. Für Beispiel 2 führte eine Interpolation bis zu 90 % - und für Beispiel 3 eine Interpolation bis 70 % der zu berechnenden Elemente zu

einem sinnvollen Ergebnis. Interpolationen mit einer höheren zu interpolierenden Elementanzahl wurden durchgeführt, aber nicht für die Abbildung berücksichtigt, da das zu erhaltende Strahlprofil ohne Interpolation kaum noch erkennbar war. Die Kenntnis bis zu welchem Prozentsatz der zu berechneten Elementen interpoliert werden kann, ohne dass sich die Interpolation negativ auf das Berechnungsergebnis auswirkt, ist von besonderer Bedeutung. Aus diesem Grund wurden die relativen Abweichungen des berechneten Radius auf Basis des 2. Momentes für Rechnungen mit Interpolation mit der Berechnung ohne Interpolation ermittelt. Die Ergebnisse sind in **Abb. 2-3** dargestellt.

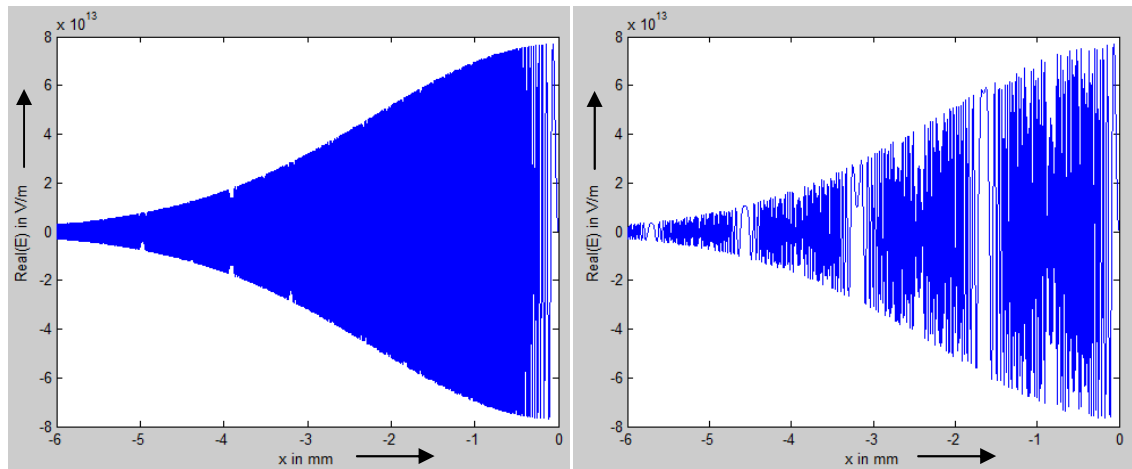


**Abb. 2-3** Darstellung der relativen Abweichungen der berechneten Radien mit Interpolation in % in Abhängigkeit von der zu interpolierenden Elementanzahl

Anhand der Abbildung ist zu sehen, dass sich mit kleiner werdenden Strahlradius auf der Startfläche größere Abweichungen ergeben als bei großen Strahlradius auf der Startfläche. Die Ursache liegt in der größeren Phasendifferenz innerhalb des Strahles bei kleinen Radien auf der Startfläche. Laserstrahlen mit einem kleinen Fokusradius besitzen eine größere Divergenz als Laserstrahlen mit einem großen Fokusradius. Demnach legen äußere Strahlanteile einen längeren Weg zurück als innere Anteile, was in einem Phasenunterschied zwischen beiden Anteilen resultiert. Dieser Phasenunterschied ergibt sich aus dem Arkustangens des Verhältnisses von Imaginär- und Realteil der elektrischen Feldstärke. Die Phasendifferenz liegt zwischen  $-\pi$  und  $+\pi$ . Real- und Imaginärteil führen deswegen in gewisser Weise eine Schwingung aus. Werden nun zu wenig Elemente berechnet, ist das Abtasttheorem verletzt und eine Interpolation führt zu keinem sinnvollen Ergebnis. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen

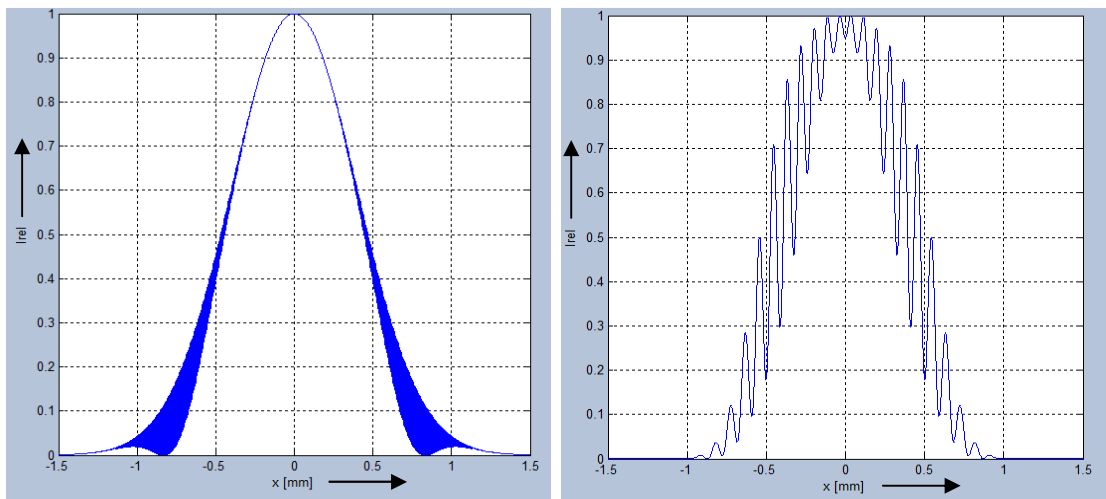


ist der Realteil der elektrischen Feldstärke für das Beispiel 3 auf der 1. Grenzfläche ohne Interpolation und mit 90 % zu interpolierenden Elementen in **Abb. 2-4** dargestellt.



**Abb. 2-4** Darstellung des Realteils der elektrischen Feldstärke auf der 1. Grenzfläche von Beispiel 3, links: keine Interpolation, rechts: 90 % zu interpolierende Elemente

Zu sehen ist deutlich, dass bei zu wenig berechneten Elementen Unregelmäßigkeiten in der Schwingungsstruktur entstehen. Eine Interpolation kann demnach zu keinem sinnvollen Ergebnis führen, was noch einmal besonders in **Abb. 2-5** deutlich wird.



**Abb. 2-5** Darstellung der Intensität für die 1. und 2. Grenzfläche aus Beispiel 3 mit 90 % zu interpolierenden Elementen, links: 1. Grenzfläche, rechts: 2. Grenzfläche

### 2.2.2 Untersuchung der Berechnungsdauer verschiedener Prozessoren und Grafikkarten

Eine Möglichkeit zur Verkürzung der Berechnungsdauer besteht in der Verwendung leistungsstarker Rechentechnik. Da eine Neuanschaffung jedoch mit hohen Kosten verbunden

ist, wurden Informationen benötigt welche Hardware für den gewünschten Zweck geeignet ist und zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

Für den Test standen drei Rechner und fünf Grafikkarten zur Auswahl. Zwei Grafikkarten beherrschen sowohl Single (einfache Genauigkeit, 4 Byte pro Zahl, 8 Dezimalstellen)- als auch Double-Precision (doppelte Genauigkeit, 8 Byte pro Zahl, 16 Dezimalstellen). Die technischen Daten der verwendeten Rechner sowie Grafikkarten sind in **Tab. 2-4** bzw. **Tab. 2-5** zusammengetragen. Die Berechnung über die Grafikkarte ist durch die kostenfreie Software GPUmat möglich. Diese ermöglicht die direkte Erzeugung von Matrizen im Grafikspeicher und dies direkt als MATLAB-Befehl ohne zusätzlich benötigte Grundkenntnisse im Bereich der Grafikkartenprogrammierung. Eine Einschränkung besteht jedoch darin, dass eine solche Berechnung lediglich mit NVIDIA-Grafikkarten möglich ist, da diese durch CUDA eine programmierbare Schnittstelle zwischen Rechner und Grafikkarte bieten. ATI-Grafikkarten haben z.T. eine höhere Leistung und sind auch billiger in der Anschaffung, jedoch existiert kein bekanntes Programm, welches eine Verbindung zwischen MATLAB und ATI-Grafikkarten ermöglicht.

Prozessortyp	Intel Core 2 Duo E6600	Intel Core 2 Duo E6300	Intel Xeon X5670 Server
Taktfrequenz / GHz	2×2,6	2×3,3	2×6×2,93
Arbeitsspeicher / GB	3	3	96
Kosten / €	162	380	2400

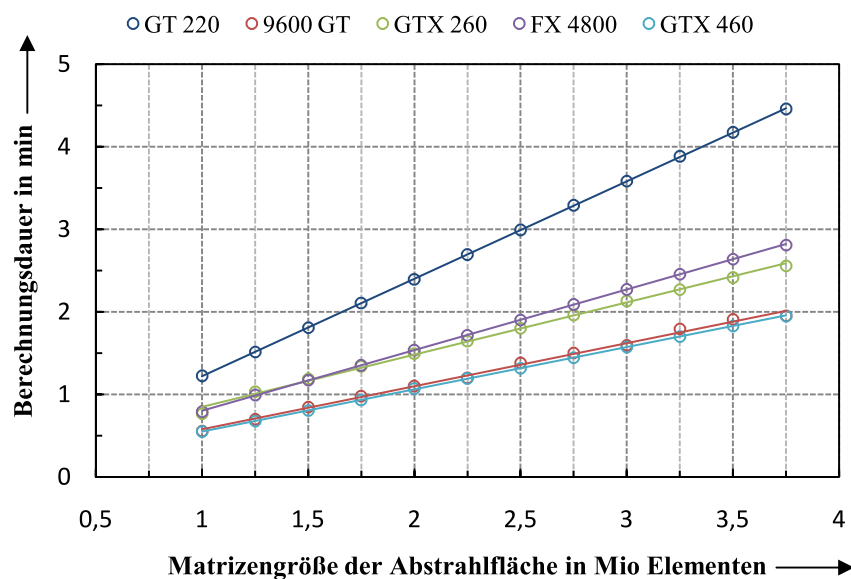
**Tab. 2-4** Technische Daten der verwendeten Rechner

Grafikprozessor	Geforce GT 220	Geforce 9600 GT	Geforce GTX 260	Quadro FX 4800	Geforce GTX 460
Grafiktakt / MHz	625	600	576	600	675
Prozessortakt = Shader-Taktfrequenz / MHz	1360	1500	1242	Keine Angabe	1350
Speicher- Taktfrequenz / MHz	1000	900	999	800	1800
Stream-Prozessoren	48	64	192	192	336
Speicherschnittstelle / bit	128	256	448	384	256
Speicherbandbreite / GB/s	32	57,6	111,9	76,8	115,2
Speicher / MB	512	512	896	1536	1024
Rechenleistung Single Precision / Gflops	195,8	312	715,4	Keine Angabe	907,2
Rechenleistung Double Precision / Gflops	Nicht möglich	Nicht möglich	Nicht möglich	Keine Angabe	76,5
Kosten / €	48	84	96	1580	145

**Tab. 2-5** Technische Daten der verwendeten Grafikkarten

Um die Leistungsfähigkeit zu testen, wurde der Kernalgorithmus, d.h. die einfache Abstrahlung von einer Startfläche auf eine Zielfläche auf den verschiedenen Komponenten unter der Verwendung von jeweils Single- und Double-Precision durchgeführt. Um die Ergebnisse besser miteinander vergleichen zu können, wurden diese in drei Gruppen zusammengefasst. Zur Berechnung wurde jeweils die Elementanzahl der Matrizen der Startfläche erhöht und die Elementanzahl auf der Zielfläche mit 2500 Elementen konstant gehalten.

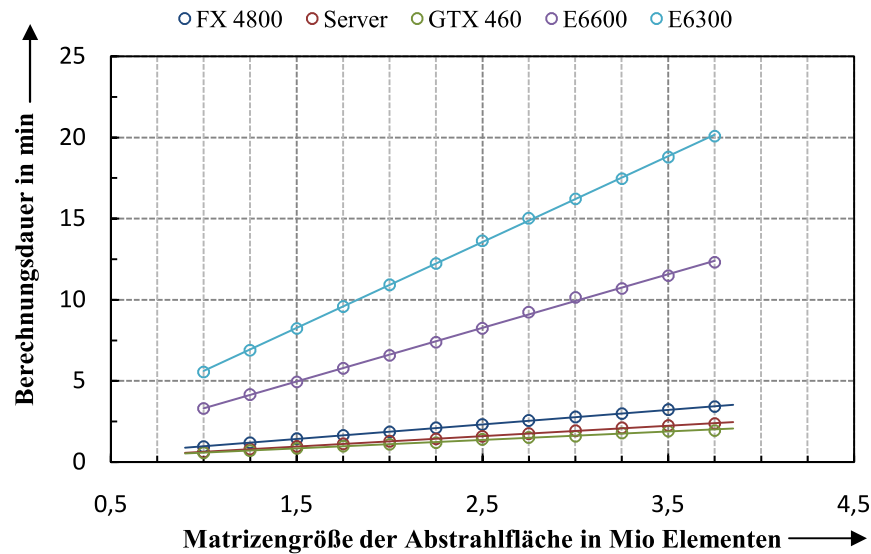
In einem ersten Test wurden alle Grafikkarten mit Single-Precision getestet und die Ergebnisse in **Abb. 2-6** dargestellt.



**Abb. 2-6** Darstellung der benötigten Berechnungsdauer der verschiedenen Grafikkarten mit Single-Precision in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression

Anhand der Darstellung ist zu sehen, dass die benötigte Berechnungsdauer nicht direkt von den technischen Daten abgelesen werden kann. Eine einfache GeForce 9600 GT ist mehr als doppelt so schnell wie die deutlich teurere Quadro FX 4800. Am besten schnitt die GeForce GTX 460 ab. Sie ist von den getesteten Karten das neueste Model und besitzt dementsprechend auch den neuesten Chipsatz. Dennoch ist sie der GeForce 9600 GT nur leicht überlegen, was wahrscheinlich an der hohen Taktfrequenz der 9600 GT liegt. Die GeForce GTX 460 besitzt jedoch mit der Fähigkeit der Verwendung von Double-Precision einen deutlichen Vorteil, welcher unter **2.2.3** noch genauer diskutiert wird.

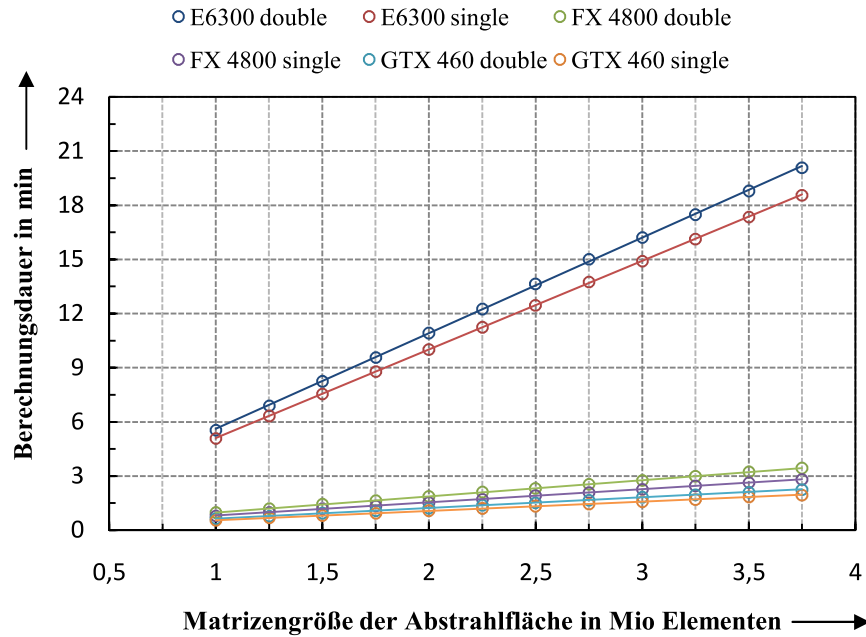
In einem weiteren Test wurde der Algorithmus mit Double-Precision auf allen Rechnern und den Grafikkarten, welche dieses Zahlenformat unterstützen, durchgeführt. Die Ergebnisse sind in der nachfolgenden Grafik veranschaulicht.



**Abb. 2-7** Darstellung der benötigten Berechnungsdauer der verschiedenen Rechner und Grafikkarten mit Double-Precision in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression

In **Abb. 2-7** ist deutlich zu sehen, dass die Berechnungen mittels Grafikkarte eine deutlich geringere Berechnungsdauer benötigen als Berechnungen auf einem handelsüblichen PC. Die Berechnungsdauer auf dem Server war etwas länger als die Berechnungsdauer auf der GTX 460, wobei die GTX 460 zu einem deutlich günstigeren Preis zu erwerben ist.

Abschließend wurden noch einmal die Berechnungsdauern mit Single- und Double-Precision verglichen und im nachfolgenden Kapitel die Unterschiede diskutiert. Die Ergebnisse des Vergleichs sind in **Abb. 2-8** dargestellt. Die Untersuchungen ergaben eine etwas kürzere Berechnungsdauer bei der Verwendung von Single-Precision statt Double-Precision bei allen Testobjekten. Die Verkürzungen sind jedoch gering. Die Anwendung von Single-Precision könnte dennoch Verwendung finden, da jede Verkürzung der Berechnungsdauer benötigt wird.



**Abb. 2-8** Vergleich der Berechnungsdauer für Single- und Double Precision der verschiedenen Rechner und Grafikkarten in Abhängigkeit von der Matrizengröße auf der Abstrahlfläche mit linearer Regression

### 2.2.3 Verwendung Single- und Double-Precision

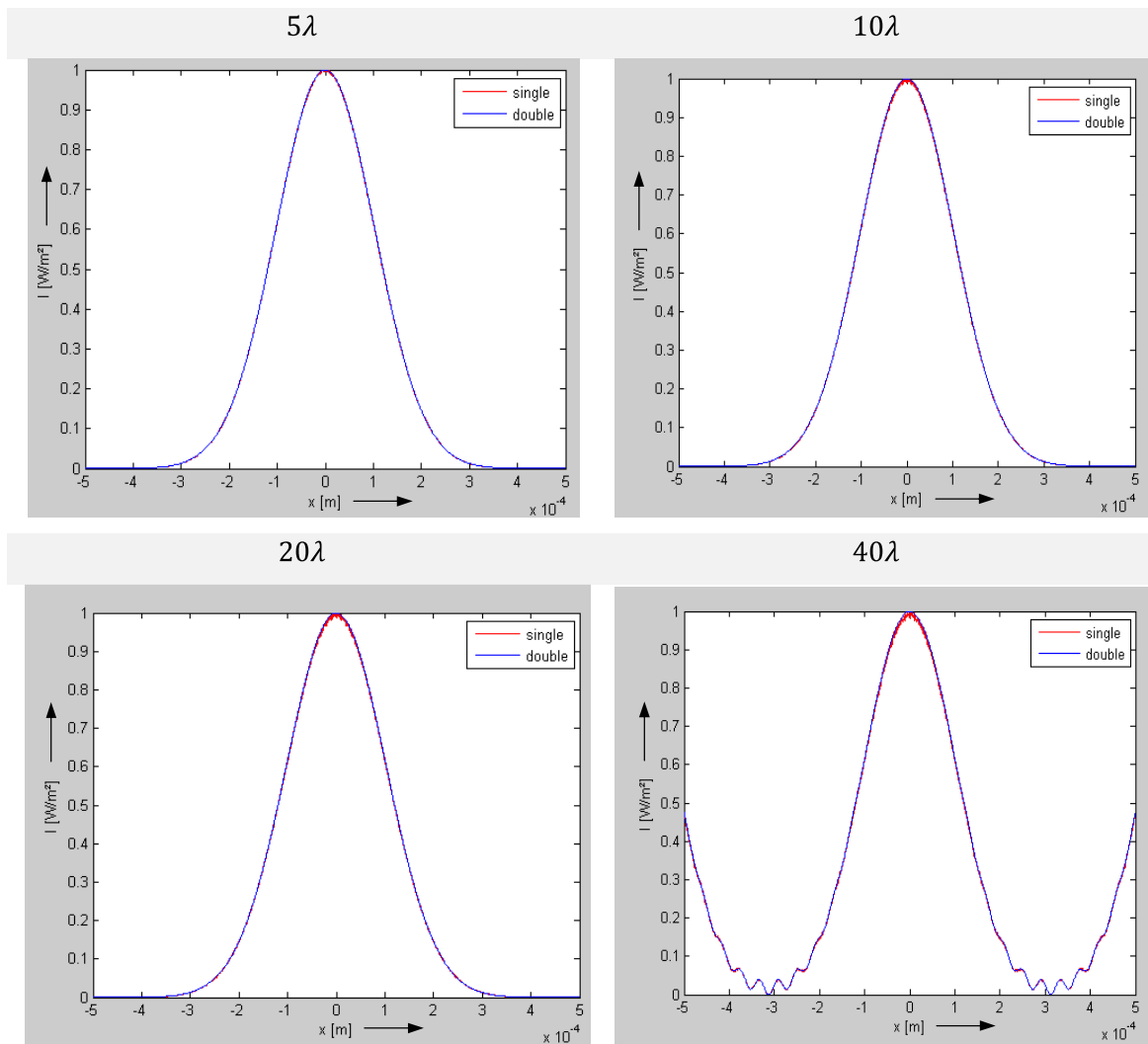
Die Verwendung von Single-Precision ergibt eine etwas kürzere Berechnungsdauer im Vergleich zu Double-Precision. Verschiedene Untersuchungen ob Single-Precision für die Berechnung ausreicht, wurden durchgeführt.

#### 2.2.3.1 Ausbreitung im Freiraum

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 200 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 0,5 \text{ mm}$ Elementgröße: $5\lambda - 40\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 25 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 0,5 \text{ mm}$ Elementanzahl: 2001 $n_1 = 1$

**Tab. 2-6** Verwendete Parameter für die Ausbreitung im Freiraum

Zur Untersuchung der Ausbreitung im Freiraum und die Auswirkungen der Elementgrößenvariation auf der Startfläche wurden die Parameter aus **Tab. 2-6** verwendet. Die Simulationen wurden mit Single- und Double-Precision durchgeführt und die erhaltenen Strahlprofile in **Abb. 2-9** visualisiert.



**Abb. 2-9** Darstellung der erhaltenen Intensitätsprofile auf der Zielfläche für die Ausbreitung im Freiraum für verschiedene Elementgrößen auf der Abstrahlfläche

Zu sehen ist in **Abb. 2-9**, dass bei allen verwendeten Elementgrößen ein Rauschen für Single-Precision auftrat. Bei der Berechnung mit Double-Precision wurde kein Rauschen festgestellt. Nebenmaxima ergaben sich bei einer zu groß gewählten Elementgröße auf der Startfläche. Dieser Effekt wurde bereits in der Bachelorarbeit [Olb2010] diskutiert. Eine Verwendung von Single-Precision ist für das gerechnete Beispiel aufgrund des Rauschens nicht geeignet. Aus diesem Grund wurden die vorgenommenen Untersuchungen aus der Bachelorarbeit zur Bestimmung der maximal möglichen Elementgröße, für den Erhalt eines Strahlprofiles ohne Rauscheffekte, noch einmal mit Single-Precision durchgeführt.

### 2.2.3.2 Bestimmung der maximal möglichen Elementgröße für Single-Precision

Die maximale Elementgröße auf der Abstrahlfläche für eine rauschfreie Abbildung mit Double-Precision wird nach (2-24) bestimmt. Demnach ist die maximale Elementgröße direkt

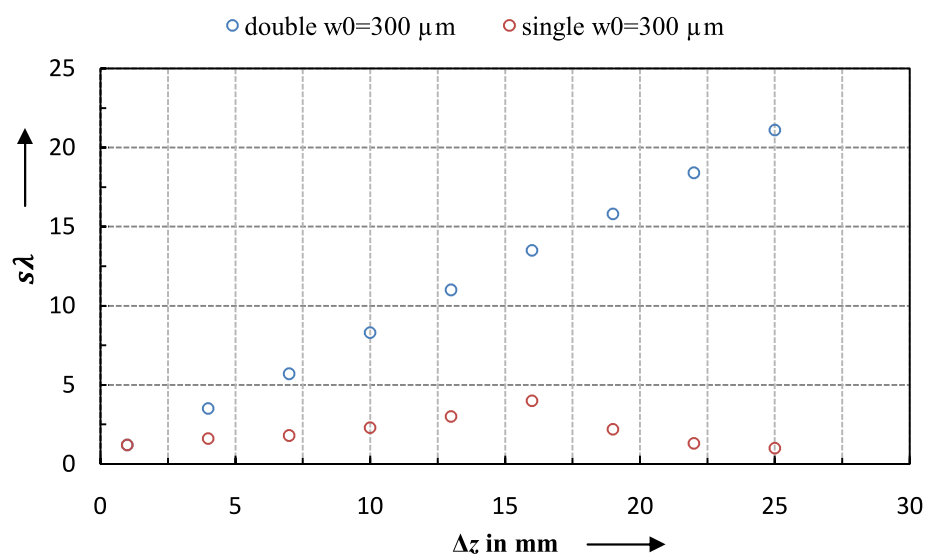
proportional der Entfernung der beiden Grenzflächen und indirekt proportional zum Strahlradius auf der Abstrahlfläche. Diese beiden Abhängigkeiten wurden auch für Single-Precision durchgeführt.

### Variation des Abstandes $\Delta z$ der Grenzflächen

Zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Abstand  $\Delta z$  wurden die Parameter aus **Tab. 2-7** verwendet. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in **Abb. 2-10** abgebildet. Zum Vergleich wurde die maximale Elementgröße für Double-Precision von Untersuchungen aus der Bachelorarbeit ebenfalls dargestellt.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 300 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 0,55 \text{ mm}$ Elementgröße: $1 - 25\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 1 - 25 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 0,55 \text{ mm}$ Elementgröße: $2\lambda$ $n_1 = 1$

**Tab. 2-7** Verwendete Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Abstand  $\Delta z$



**Abb. 2-10** Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Abstand  $\Delta z$  der Grenzflächen für Single- und Double-Precision

Anhand der Darstellung ist deutlich zu sehen, dass für Double-Precision eine sehr viel größere Elementgröße gewählt werden kann als für Single-Precision. Double-Precision besitzt die doppelte Anzahl an Ziffern. Daher machen sich numerische Fehler erst sehr viel später bemerkbar. Die Verwendung von Single-Precision liefert bei gleicher Elementanzahl eine etwas geringere Berechnungsdauer. Bei gegebenen Parametern der Grenzflächen, kann mit Single-Precision aber eine deutlich geringere maximale Elementgröße gewählt werden, was zu einer

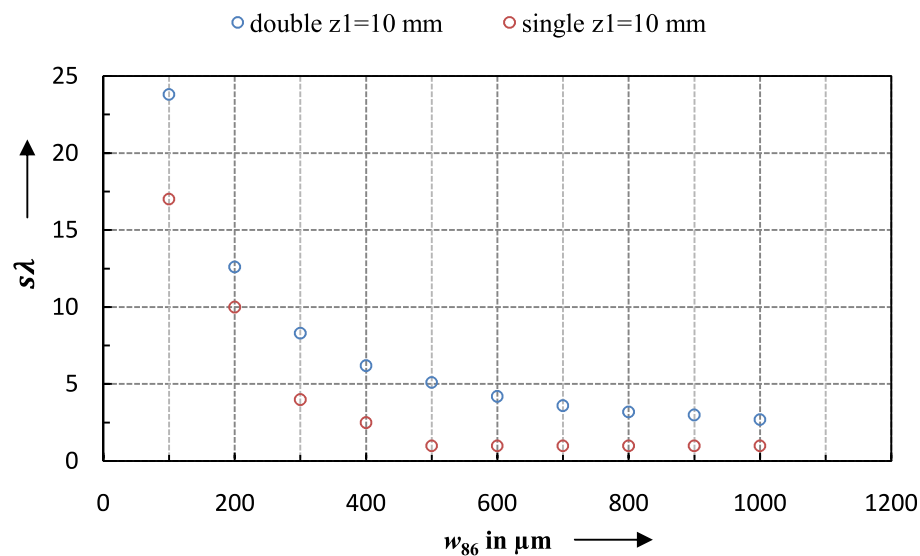
größeren Elementanzahl im Vergleich zu Double-Precision führt und somit zu einer längeren Berechnungsdauer. Die Verwendung von Single-Precision liefert somit keinen Vorteil sondern einen Nachteil.

### Variation des Strahlradius $w_{86}$ auf der Abstrahlfläche

Zur Untersuchung der Abhängigkeit des Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche wurden die Parameter aus **Tab. 2-8** verwendet. Die Ergebnisse der Untersuchung sind in **Abb. 2-11** abgebildet.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $P = 10 \text{ W}$ Gaußstrahl $w_{86} = 100 - 1000 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 2,5w_0$ Elementgröße: $1 - 25\lambda$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Linie	Ebene $z_1 = 10 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 2,5w_0$ Elementgröße: $2\lambda$ $n_1 = 1$

**Tab. 2-8** Verwendete Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit vom Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche



**Abb. 2-11** Darstellung der Abhängigkeit der maximalen Elementgröße vom Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche für Single- und Double-Precision

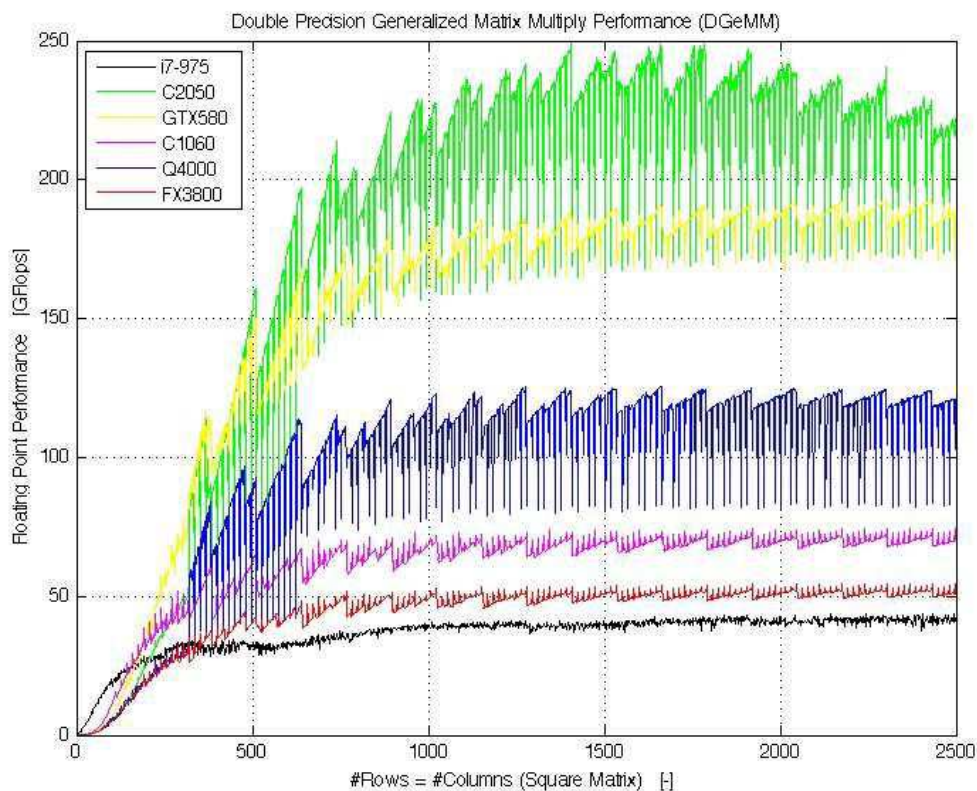
Auch in dieser Darstellung ist zu sehen, dass für Single-Precision, bei gleichen Parametern der Grenzflächen, eine kleiner maximale Elementgröße im Gegensatz zur Verwendung von Double-Precision gewählt werden kann. Auch bei dieser Abhängigkeit konnte gezeigt werden, dass die Verwendung von Single-Precision ungeeignet ist.



### 2.2.4 Geeignete Grafikkarten

Die Untersuchungen unter 2.2.2 haben gezeigt, dass die Berechnung mittels Grafikkarten eine kürzere Berechnungsdauer aufweist als bei der Berechnung über PC-Prozessoren. Weiterhin konnte unter 2.2.3 gezeigt werden, dass für die Berechnungen die Verwendung von Double-Precision notwendig ist. Somit kommen nur Grafikkarten in Betracht, welche Double-Precision unterstützen.

Zur Auswahl stehen leistungsstarke Gamergrafikkarten und Tesla-Karten, welche speziell für Simulationen eingesetzt werden. Da nur die unter 2.2.3 getesteten Grafikkarten zur Verfügung standen, können die Geschwindigkeiten anderer Grafikkarten nur abgeschätzt bzw. über Literaturangaben ermittelt werden. **Abb. 2-12** stammt aus dem Internetforum der kostenpflichtigen MATLAB Erweiterung JACKET [Jac2011]:



**Abb. 2-12** Darstellung der Abhängigkeit der erreichten Floating Point (Gleitkomma) Performance mit Double Precision in Abhängigkeit der Matrizengröße

Zu sehen ist in dieser Darstellung eine leichte Überlegenheit der Grafikkarte Tesla C2050 gegenüber der Geforce GTX 580. Weiterhin ist auch hier die deutliche Überlegenheit von Grafikkarten gegenüber PC-Prozessoren erkennbar. Die technischen Daten der beiden Grafikkarten sind in **Tab. 2-9** erfasst. Von der GTX 580 ist bereits das Nachfolgemodel GTX 590 erhältlich, dessen Daten ebenfalls in **Tab. 2-9** zu finden sind. Diese Grafikkarte ist der

Tesla C2050 wahrscheinlich in der testbaren Performance überlegen und zudem kostengünstiger. Leider konnten keine Angaben gefunden werden, ob mehrere Gamerkarten parallel eingesetzt werden können. Für Tesla-Karten konnten diese Angaben sowie weitere Vorteile gegenüber Gamerkarten auf der Website von NVidia [NVid2011] gefunden werden:

- Unterstützung großer Datensätze
- Leistungstreiber für Windows
- Software für Clusterverwaltung und Grafikprozessor-Überwachung
- Belastungstests mit null Fehlertoleranz

Grafikkarte	GTX 580	GTX 590	Tesla C2050
Grafiktakt /MHz	772	2×607	575
Prozessortakt = Shader-Taktfrequenz / MHz	1544	2×1215	1150
Speicher- Taktfrequenz / MHz	2004	2×1707	1500
Stream-Prozessoren	512	2×512	448
Speicherschnittstelle / bit	384	2×384	384
Speicherbandbreite / GB/s	192,4	2×163,9	144
Speicher / MB	1536	2×1536	3072
Rechenleistung Single Precision / Gflops	1581,1	2×1244,2	1030
Rechenleistung Double Precision / Gflops	197,6	2×155,5	515
Kosten / €	400	700	2000

**Tab. 2-9** Technische Daten möglicher geeigneter Grafikkarten

Der größte Vorteil der Tesla-Karten liegt in der Möglichkeit mehrere Karten automatisch parallel zu betreiben und in der fehlerfreien Berechnung.

Alle in **Tab. 2-9** beschriebenen Grafikkarten besitzen den Chipsatz Fermi, welche mit dem 40 nm Fertigungsprozess hergestellt wird [Blog2011]. Kepler, die Nachfolgetechnologie von Fermi, soll laut Angaben von NVidia mit einem 28 nm Fertigungsprozess hergestellt werden, die drei- bis vierfache Leistung aufweisen und 2012 auf dem Markt erscheinen. Voraussichtlich 2013 wird die Technologie Maxwell veröffentlicht, die zehn- bis zwölfache Leistung im Vergleich zu Fermi erbringen soll. Da das Projekt ULMI erst 2012 startet, kann zu diesem Zeitpunkt wahrscheinlich schon auf Nachfolgemodelle zurück gegriffen und somit eine noch kürzere Berechnungsdauer erzielt werden.

### 2.2.5 Berechnungsdauer der verschiedenen Berechnungsalternativen

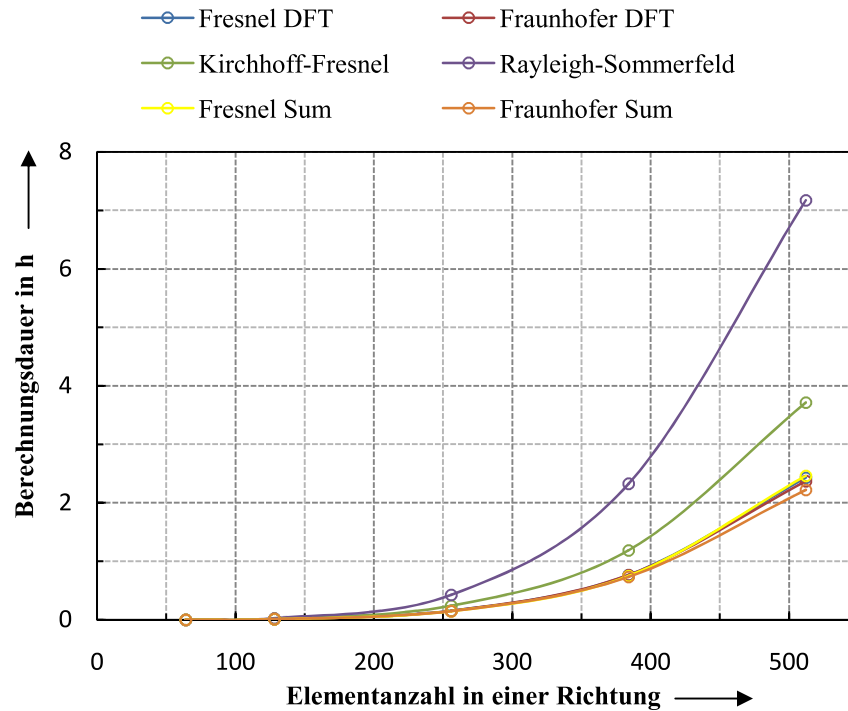
Zum Vergleich der Berechnungsdauern wurde für alle unter 2.1 beschriebenen Berechnungsvarianten die in **Tab. 2-10** beschriebenen Parameter verwendet. Die Berechnungen wurden mit einem separaten Script ausgeführt, welches noch nicht im Programm implementiert ist. Da sich sehr unterschiedliche Zeiten bei der Berechnung ergaben und eine Darstellung aller Ergebnisse in einem Diagramm zur Unübersichtlichkeit führen würde, wurden zunächst die einzelnen Varianten in drei Gruppierungen (siehe **Tab. 2-11**) unterteilt und jeweils die einzelnen Ergebnisse für die Gruppierung in **Abb. 2-13** und **Abb. 2-14** dargestellt. Für die Berechnungsverfahren, welche eine Fourier-Transformation beinhalten, muss die Elementanzahl auf der Zielfläche die gleiche Elementanzahl wie auf der Startfläche sein. Für Verfahren mittels Fast Fourier-Transformation muss die Elementanzahl in eine Richtung immer eine Potenz von zwei sein. Damit ein Vergleich der Verfahren möglich ist, wurden die gleichen Elementanzahlen auf beiden Flächen auch für die summarischen Varianten verwendet. Für Alternativen mittels Fast Fourier-Transformation (FFT) darf sich zudem die Begrenzungsgröße auf den beiden Flächen nicht ändern. Eine Änderung ist für die anderen Verfahren möglich.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$ $E_0 = 1 \text{ V/m}$ Gaußstrahl $w_{86} = 30 \mu\text{m}$	Ebene $z_0 = 0$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 100/500 \mu\text{m}$ Elementgröße: $64^2 - 1024^2$ $n_0 = 1$ Abstrahlung: Fläche	Ebene $z_1 = 20 \text{ mm}$ Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 500 \mu\text{m}$ Elementgröße: $64^2 - 1024^2$ $n_1 = 1$

**Tab. 2-10** Verwendete Parameter zur Untersuchung der Berechnungsdauer der einzelnen Berechnungsalternativen

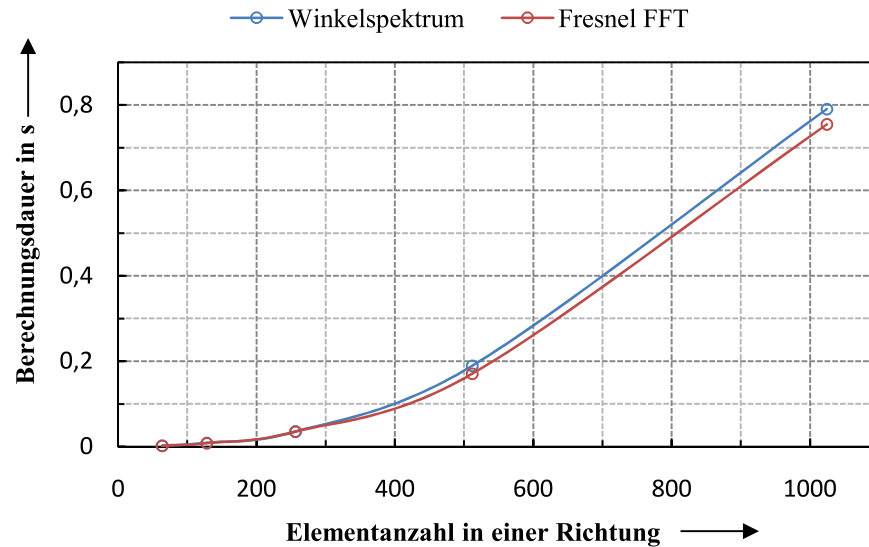
Summarische Varianten	Diskrete Fourier-Transformation	Fast Fourier-Transformation
Kirchhoff-Fresnel (2-1)	Fresnel-Näherung (2-13)	Fresnel-Näherung (2-13)
Rayleigh-Sommerfeld (2-4)	Fraunhofer-Näherung (2-21)	Winkelspektrum (2-23)
Fresnel-Näherung (2-9)		
Fraunhofer-Näherung (2-20)		

**Tab. 2-11** Einteilung der Berechnungsalternativen in drei Gruppierungen



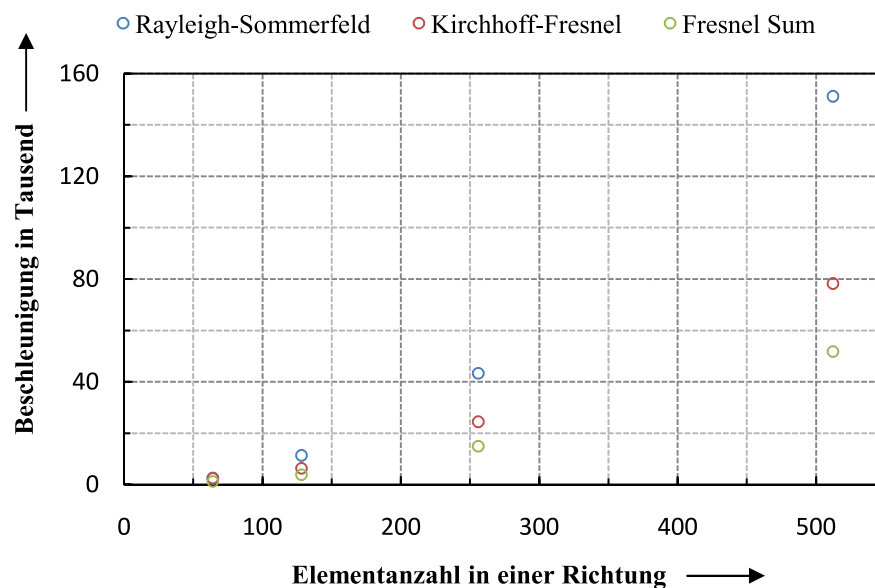
**Abb. 2-13** Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungsdauer für Varianten mit Summation und diskreter Fourier-Transformation

Anhand der Darstellung ist zu erkennen, dass die Berechnungen mittels diskreter Fourier-Transformation (DFT) in etwa die gleiche Berechnungsdauer wie die gleichen Verfahren auf summarischer Basis (Fresnel- und Fraunhofer Näherung) aufweisen. Somit haben Verfahren mit diskreter Fourier-Transformation mit dem jetzigen Algorithmus keine weitere Bedeutung. Hinzu kommt, dass bei diesen Varianten nur der Strahlradius richtig berechnet wird, nicht aber die maximale elektrische Feldstärke (siehe 2.2.6). Weiterhin ist zu erkennen, dass die Variante nach Rayleigh und Sommerfeld die größte Berechnungsdauer benötigt und die Näherungen nach Fresnel und Fraunhofer etwa nur die halbe Berechnungsdauer wie der bisher verwendete Algorithmus nach Kirchhoff und Fresnel. Die Verwendung der Näherungen von Fresnel und Fraunhofer können dadurch als Alternativen in Betracht gezogen werden.



**Abb. 2-14** Darstellung der Abhängigkeit der Berechnungsdauer für Varianten mit Fast Fourier-Transformation

Die Verfahren, welche auf der Basis der FFT beruhen, weisen im Vergleich zu den summarischen Verfahren eine sehr viel geringere Berechnungsdauer auf. Die Fresnel-Näherung ist etwas schneller als die Berechnung mit Hilfe des Winkelspektrums. Um die Überlegenheit in Bezug auf die Berechnungsdauer deutlich zu zeigen, wurde die Beschleunigung (wie viel Mal schneller) der Fresnel-Näherung mit FFT gegenüber der Variante nach Rayleigh-Sommerfeld, Kirchhoff-Fresnel und der summarischen Fresnel-Näherung in **Abb. 2-15** dargestellt.



**Abb. 2-15** Darstellung der Beschleunigung mit der Fresnel-Näherung auf Basis der FFT gegenüber verschiedenen anderen Varianten

**Abb. 2-15** zeigt, dass mit steigender Elementgröße die Beschleunigung mittels FFT ansteigt. Die Beschleunigung gegenüber Kirchhoff-Fresnel beträgt bei einer Elementanzahl von  $512 \times 512$  bereits 80000. Die Berechnung mittels FFT ist den summarischen Varianten damit deutlich in der Berechnungsdauer überlegen. Ob beide Varianten der FFT auch für die Berechnung eingesetzt werden können, zeigen die Untersuchungen im nächsten Gliederungspunkt.

### 2.2.6 Korrektheit der Ergebnisse

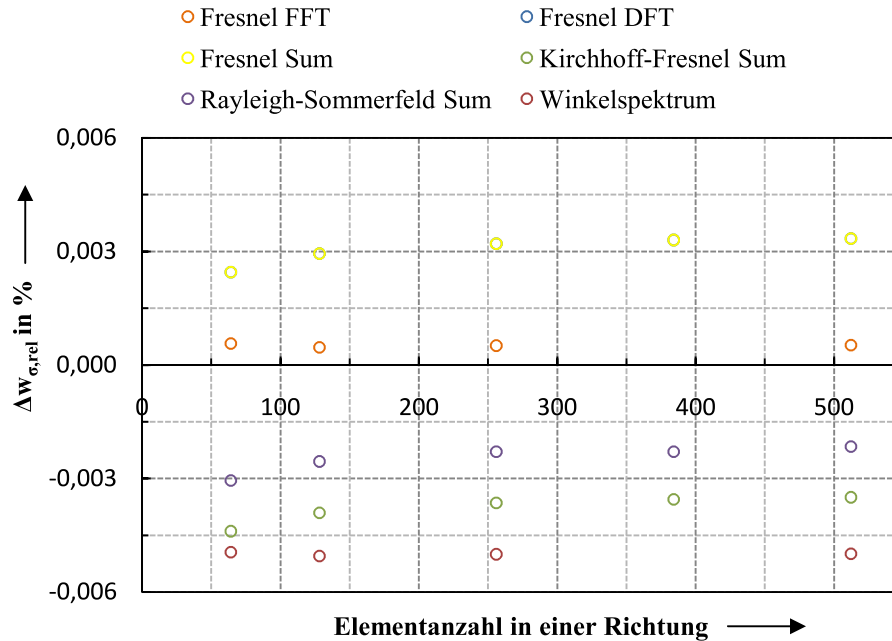
Die unter **2.1** beschriebenen Berechnungsalternativen zum bisher verwendeten Kirchhoff-Fresnelschen Beugungsintegral beinhalten alle einen unterschiedlichen numerischen Aufwand und werden auf verschiedene Arten berechnet. Um die Eignung der einzelnen Verfahren zu untersuchen wurden einfache Tests zur Überprüfung der Richtigkeit der Ergebnisse sowie der benötigten Berechnungsdauern für verschiedene Elementanzahlen durchgeführt.

Zur Feststellung der Korrektheit der Ergebnisse wurden die erhaltenen maximalen elektrischen Feldstärken (absoluter Betrag) und die erhaltenen Strahlradien auf Basis des 2. Momentes auf der Zielfläche mit den theoretischen Werten nach **(2-25)** bzw. **(2-26)** verglichen und die relativen Abweichungen in Bezug auf die theoretischen Werte berechnet.

$$|E_0(z)| = |E_0(0)| \cdot \frac{w_0}{w(z)} \quad (2-25)$$

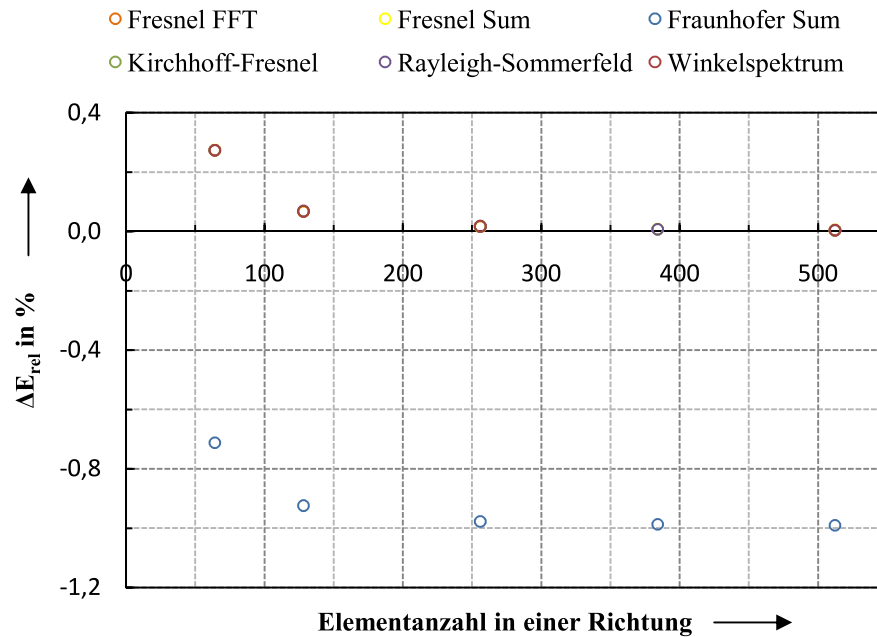
$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z \cdot \lambda}{\pi \cdot w_0^2} \right)^2} \quad (2-26)$$

Die Parameter der Berechnungen wurden aus **Tab. 2-10** beibehalten.



**Abb. 2-16** Darstellung der relativen Abweichungen des auf Basis des 2. Momentes bestimmten Strahlradius zum theoretischen Wert für alle Varianten außer der Fraunhofer-Näherung

Anhand der Darstellung in **Abb. 2-16** ist zu sehen, dass alle Varianten den Strahlradius mit einer Genauigkeit unter 0,006 % berechnen. Demnach sind alle Varianten sehr gut zur Berechnung der Strahlausbreitung geeignet, wenn der Strahlradius auf der Abbildungsfläche von Bedeutung ist. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass alle Varianten der Fresnel-Näherung einen Strahlradius, der etwas größer als der theoretische Wert ist, ergaben und die anderen Varianten, welche keine (Rayleigh-Sommerfeld, Winkelspektrum) oder nur wenig (Kirchhoff-Fresnel) Vereinfachungen enthalten, einen etwas zu kleinen Strahlradius ergaben. Die Fresnel-Näherungen mittels DFT und Summation ergaben die gleichen Abweichungen. Die Fresnel-Näherung wurde unter der Annahme, dass sich die Abbildungsfläche in relativ großer Entfernung von der Abstrahlfläche befindet, gebildet. Dadurch konnte der Abstand in einer Taylor-Reihe entwickelt werden. Diese Vereinfachung verursachen wahrscheinlich die positiven Abweichungen. Dennoch liegt der Fehler weit unter 1 % und ist für die Berechnung sehr gut geeignet. Die Berechnungen mittels Fraunhofer-Näherungen ergaben für alle Elementanzahlen eine Abweichung von rund 1 %. Da diese Abweichung sehr viel größer als für die anderen Verfahren ist, wurde die Fraunhofer-Näherung nicht in **Abb. 2-16** eingefügt. Die Fraunhofer-Näherung unterliegt weiteren Annahmen (siehe **2.1.4**), wodurch sich die größeren Abweichungen ergeben. Da die Berechnungsdauer die gleiche wie für die Fresnel-Näherung ist und diese eine bessere Genauigkeit liefert, kann auf die Verwendung der Fraunhofer-Näherung verzichtet werden.



**Abb. 2-17** Darstellung der relativen Abweichungen der bestimmten maximalen Feldstärken für alle Varianten außer Verfahren mittels DFT

Der Vergleich der ermittelten maximalen absoluten Beträge der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche mit den theoretischen Werten ergab die in **Abb. 2-17** dargestellten Abweichungen. Die ermittelten Feldstärken mit den Verfahren auf Basis der DFT wurden in der Abbildung nicht mit dargestellt, da sich Abweichungen von  $10^{10}$  bis  $10^{11}$  % ergaben. Die Ursache für diese riesigen Abweichungen konnte bisher nicht geklärt werden. Die Varianten der DFT sind demnach nur für die Berechnung der Strahlabmessungen geeignet und nicht für Absolutangaben der elektrischen Feldstärke bzw. der Intensität. Da diese Verfahren die gleiche Berechnungsdauer wie die summarischen Varianten aufweisen, kann auf die Verwendung von DFT-Verfahren verzichtet werden. Weiterhin ist in **Abb. 2-17** zu erkennen, dass die Fraunhofer-Näherung eine größere relative Abweichung ergibt, als die anderen Varianten. Die Abweichung beträgt in etwa 1 %. Die Abweichungen der anderen Verfahren sind in etwa gleich groß und nehmen mit zunehmender Elementanzahl ab. Der Grund dafür sind die geringer werdenden Diskretisierungsfehler mit zunehmender Elementanzahl.



### 3 Charakterisierung der Strahlqualität

#### 3.1 Theoretische Betrachtungen

Die Charakterisierung von kohärenten und partiell kohärenten Strahlungsfeldern beruht auf der Annahme, dass diese der Wigner-Verteilung gehorchen. Die Wigner-Verteilung stammt ursprünglich aus der Quantenmechanik und wurde in den 30er Jahren von Eugene Wigner eingeführt. Sie ist eine gemischte Orts-Winkel-Darstellung und ist besonders zur Darstellung orts- und zeitabhängiger Signale geeignet [Eip1998]. Den verschiedenen Momenten der Wigner-Verteilung kommt dabei eine unterschiedliche physikalische Bedeutung zu. Die Momente 1. Ordnung in Bezug auf die Ortskoordinaten können als Schwerpunkt interpretiert werden. Die Momente 2. Ordnung als Varianz. Aus ihr lassen sich, wie im Folgenden zu sehen sein wird, die Strahlabmessungen berechnen, welche die Standardabweichung repräsentieren.

##### 3.1.1 Momente 1. Ordnung

Die Momente 1. Ordnung einer beliebigen Intensitätsverteilung  $I$  in kartesischen Koordinaten lassen sich wie folgt berechnen [DIN2008]:

$$\begin{array}{ll} \text{1. Moment bzw. Schwerpunkt in} & \langle x \rangle = \bar{x} = \frac{\iint x \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \\ \text{x-Richtung} & \end{array} \quad (3-1)$$

$$\begin{array}{ll} \text{1. Moment bzw. Schwerpunkt in} & \langle y \rangle = \bar{y} = \frac{\iint y \cdot I(x, y, z) dx dy}{\iint I(x, y, z) dx dy} \\ \text{y-Richtung} & \end{array} \quad (3-2)$$

Der Nenner stellt dabei die im Strahlprofil enthaltene Leistung dar.

$$\begin{array}{ll} \text{Leistungsbestimmung in} & P = \iint I(x, y, z) dx dy \\ \text{kartesischen Koordinaten} & \end{array} \quad (3-3)$$

Da auch in den folgenden Formeln der Nenner die im Strahlprofil eingeschlossene Leistung darstellt, wird dieser ab jetzt mit  $P$  bezeichnet.

##### 3.1.2 Momente 2. Ordnung

$$\begin{array}{ll} \text{2. Moment} & \langle x^2 \rangle = \sigma_x^2(z) = \frac{1}{P} \iint (x - \bar{x})^2 \cdot I(x, y, z) dx dy \\ \text{x-Richtung} & \end{array} \quad (3-4)$$

2. Moment

*y*-Richtung

$$\langle y^2 \rangle = \sigma_y^2(z) = \frac{1}{P} \iint (y - \bar{y})^2 \cdot I(x, y, z) dx dy \quad (3-5)$$

2. Moment

*xy*-Richtung

$$\langle xy \rangle = \sigma_{xy}^2(z) = \frac{1}{P} \iint (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) \cdot I(x, y, z) dx dy \quad (3-6)$$

Der dazugehörige Strahlradius ergibt sich aus:

Strahlradius der

Hauptachse in

*x*-Richtung

$$w_{\sigma x} = \sqrt{2 \cdot \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy}^2)^2} \right]} \quad (3-7)$$

Strahlradius der

Hauptachse in

*y*-Richtung

$$w_{\sigma y} = \sqrt{2 \cdot \left[ (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \gamma \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(\sigma_{xy}^2)^2} \right]} \quad (3-8)$$

mit  $\gamma = \text{sgn}(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$

Die Indizes  $\sigma x$  bzw.  $\sigma y$  beschreiben dabei die Hauptachse, welche sich am nächsten an der *x*- bzw. *y*-Achse befindet.

Eine weitere wichtige Größe bildet der Azimutwinkel  $\varphi$ . Dieser Winkel wird von der *x*-Achse und der am nächsten gelegenen Hauptachse eingeschlossen und ist im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) definiert. Laut DIN ISO EN 11146-1 berechnet er sich nach:

Azimutwinkel

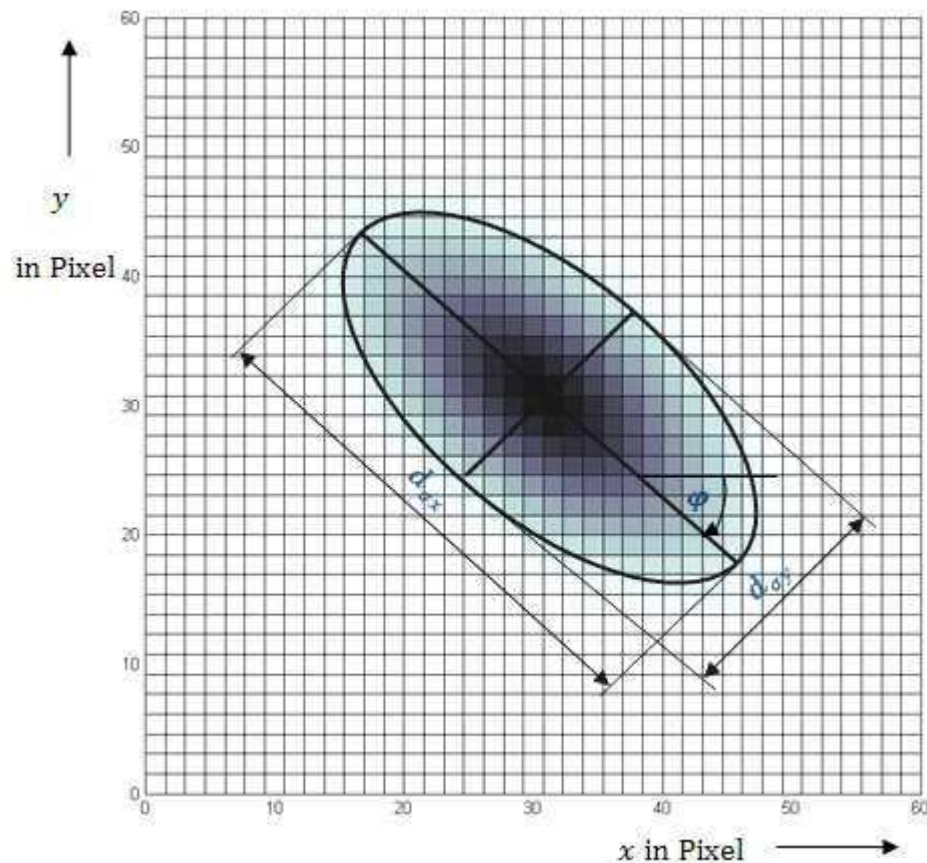
$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right) \quad (3-9)$$

für  $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ . Anderenfalls gilt:

Azimutwinkel

$$\varphi = \text{sgn}(\sigma_{xy}^2) \frac{\pi}{4} \quad (3-10)$$

Durch die Berechnung der Strahlmessungen entlang der Hauptachsen sowie des Azimutwinkels sind alle Ortparameter einer Schnittebene gegeben. Zur Veranschaulichung sind die Parameter in der nachfolgenden Abbildung dargestellt:



**Abb. 3-18** Darstellung der zu ermittelnden Ortsparameter

Im Programm finden noch weitere Radiusdefinitionen Anwendung deren Bestimmung unter 3.2.2 beschrieben wird.

### 3.1.3 Weitere Strahlparameter

Um weitere Parameter wie z.B. die Beugungsmaßzahl  $M^2$  zu bestimmen, muss nach DIN ISO EN 11146-1 an mindestens 10 verschiedenen z-Positionen das Strahlprofil aufgenommen werden. Die Hälfte der gemessenen Ebenen muss innerhalb der einfachen Rayleigh-Länge gleichmäßig verteilt auf beiden Seiten der Strahltaile liegen. Die andere Hälfte sollte außerhalb der doppelten Rayleigh-Länge auf die Bereiche vor und nach dem Fokus möglichst gleichmäßig verteilt sein. Für jede Ebene müssen die Radien  $w_{\sigma x}$  und  $w_{\sigma y}$  sowie die dazugehörigen Azimutwinkel  $\phi$  bestimmt werden [DIN2005-1]. Weicht die Differenz der Azimutwinkel zweier beliebiger nicht kreisförmiger Profile um mehr als  $10^\circ$  ab, kann die nachfolgende Beschreibung nicht angewandt werden und DIN ISO EN 11146-2 muss verwendet werden. Als kreisförmig kann ein Strahlprofil angesehen werden, wenn seine Elliptizität  $\varepsilon$  größer als 0,87 ist.

$$\text{Elliptizität} \quad \varepsilon = \frac{w_{\sigma y}}{w_{\sigma x}} \quad (3-11)$$

Die Berechnung nach DIN ISO EN 11146-2 ist noch nicht im Programm implementiert.

Wurden alle Ebenen gemessen und die dazugehörigen Ortsparameter bestimmt, können diese entlang der  $z$ -Achse abgetragen werden und ein Hyperbelfit (mathematisch korrekt: Approximation einer hyperbolischen Funktion) entsprechend:

$$\begin{array}{l} \text{Funktionsgleichung} \\ \text{für Hyperbelfit} \end{array} \quad 2w_{\sigma} = \sqrt{a + bz + cz^2} \quad (3-12)$$

bzw. ein Parabelfit nach:

$$\begin{array}{l} \text{Funktionsgleichung} \\ \text{für Parabelfit} \end{array} \quad 4w_{\sigma}^2 = a + bz + cz^2 \quad (3-13)$$

durchgeführt werden. Mit Hilfe der ermittelten Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  lassen sich alle weiteren Strahlparameter nach den folgenden Gleichungen berechnen:

$$\text{Tailenposition} \quad z_0 = -\frac{b}{2c} \quad (3-14)$$

$$\text{Tailenradius} \quad w_{0\sigma} = \frac{1}{4\sqrt{c}} \sqrt{4ac - b^2} \quad (3-15)$$

$$\text{Fernfelddivergenz} \quad \theta_{\sigma} = \sqrt{c} \quad (3-16)$$

$$\text{Rayleigh-Länge} \quad z_R = \frac{1}{2c} \sqrt{4ac - b^2} \quad (3-17)$$

$$\text{Beugungsmaßzahl} \quad M^2 = \frac{\pi}{8\lambda} \sqrt{4ac - b^2} \quad (3-18)$$

Alle genannten Formeln stammen aus DIN EN ISO 11146-1 [DIN2005-1]. Die Berechnungen sind laut DIN EN ISO 11146-1 nur für die Parameter des 2. Momentes ausgewiesen. Im Programm werden die Strahlparameter trotzdem für alle gewählten Radiusdefinitionen berechnet um als Vergleichswert zu dienen. Diese Angaben dürfen jedoch nicht als Strahlparameter verwendet werden.

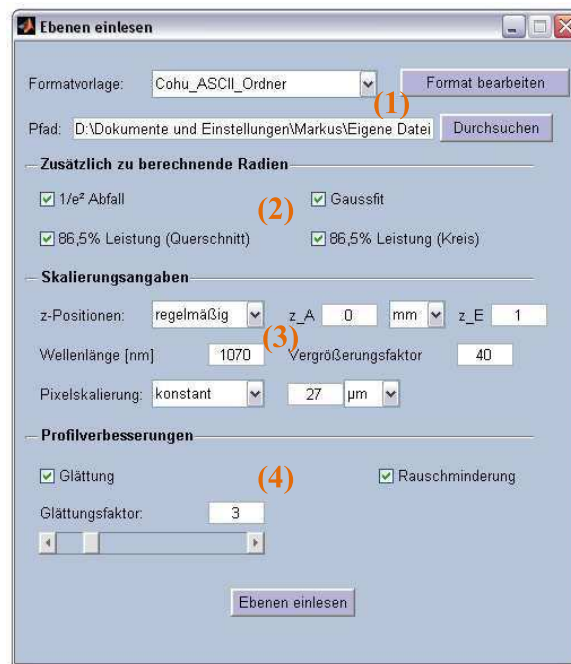
## 3.2 Die Strahldiagnosesoftware

In diesem Kapitel werden kurz die Grundzüge in Bezug auf Bedienung und Funktionalität des Programmes zur Strahldiagnose dargestellt und erläutert. Eine kurze Beschreibung der wichtigsten Variablen sowie der verwendeten m-Files ist in der Datei Variablen.m zu finden. Der Quellcode ist mit einfachen Kommentaren zur Erläuterung der einzelnen Algorithmen und Elementen ausgestattet. Eine ausführlichere Beschreibung des Programmes ist im Simulationsbeleg: Charakterisierung der Strahlqualität [Olb22010] zu finden.

### 3.2.1 Bedienung und Berechnungsmöglichkeiten

Das Programm wird mit der Datei START.m gestartet. Danach öffnet sich eine Oberfläche, welche zunächst noch leere Felder enthält. Im oberen linken Rand sind eine Menüleiste und eine Schnellstartleiste vorhanden. Die Menüleiste enthält die Funktionen „Neuer Import“ und „Schließen“. Durch einen Klick auf „Neuer Import“ öffnet sich ein neues Fenster, in welchem die Parameter für die einzulesenden Daten festgelegt werden. Durch Betätigen von „Schließen“ werden alle offenen Fenster geschlossen. Die Funktion „Neuer Import“ kann ebenfalls in der Schnellstartleiste durch das 1. Icon aufgerufen werden.

Zum Einlesen der einzelnen Ebenen werden einige zusätzliche Angaben benötigt, die der Benutzer selbstständig eingeben muss (**Abb. 3-1**). Zunächst muss ausgewählt werden, um welchen Dateityp es sich handelt (1). In der aktuellen Version ist nur die Option: Cohu\_ASCII\_Ordner, verfügbar, bei welcher alle ASCII-Dateien eines gewählten Ordners eingelesen werden. Der Button rechts daneben enthält noch keine Funktionen. Für weitere Versionen ist geplant, dass sich der Benutzer die Angaben des Dateityps selbst zusammen stellen kann. In der jetzigen Version funktionieren nur einzelne Ebenen, welche jeweils separat als \*.ASC gespeichert sind. Unterhalb der Formatfunktionen befindet sich die Pfadeingabe. Der Pfad, in welchem sich die Dateien befinden, kann entweder manuell im dazugehörigen Edit-Feld oder durch einen Klick auf den Button „Durchsuchen“ ausgewählt werden. Die Pfadangabe muss absolut, d.h. immer vollständig (D:\...), erfolgen.



**Abb. 3-1** Fenster für die Eingabe wichtiger Parameter

Im Bereich (2) muss der Benutzer auswählen, welche zusätzlichen Radian er berechnet haben möchte. Standardmäßig wird nur der Radius auf Basis des 2. Moments berechnet. Je mehr Radian ausgewählt werden, desto länger dauert das Einlesen.

Abschnitt (3) enthält die Skalierungsparameter. Diese müssen beim Kamerasystem Cohu im Vorfeld ermittelt werden. Für die z-Positionen und Pixelskalierung besteht jeweils eine Option diese regelmäßig/ konstant vorzunehmen oder für jede Ebene manuell einzugeben. Für die manuelle Eingabe öffnet sich ein separates Fenster.

Im letzten Bereich (4) des Fensters muss noch gewählt werden, ob eine Glättung des Strahlprofils gewünscht ist und eine Rauschminderung erfolgen soll. Zur Rauschminderung stehen verschiedene Optionen zur Verfügung. Zwischen fünf verschiedenen Rauschminderungsverfahren kann gewählt werden. Die Kombination mehrerer Verfahren ist möglich, aber nicht zu empfehlen. Die Funktion „Rauschminderung durch Zufallspunkte“ ist noch nicht verfügbar. Je nach gewähltem Verfahren können negative Intensitätswerte entstehen. Ob diese zugelassen werden, kann manuell entschieden werden. Negative Intensitätswerte sollten i. d. R. zugelassen werden.

Sind alle Eingaben erfolgt, kann der Einlesevorgang durch einen Klick auf „Ebenen einlesen“ im Fenster in **Abb. 3-1** gestartet werden. Die Oberfläche vom Start des Programmes verändert sich nach dem erfolgreichen Einlesevorgang und enthält nun weitere Elemente (**Abb. 3-2**).

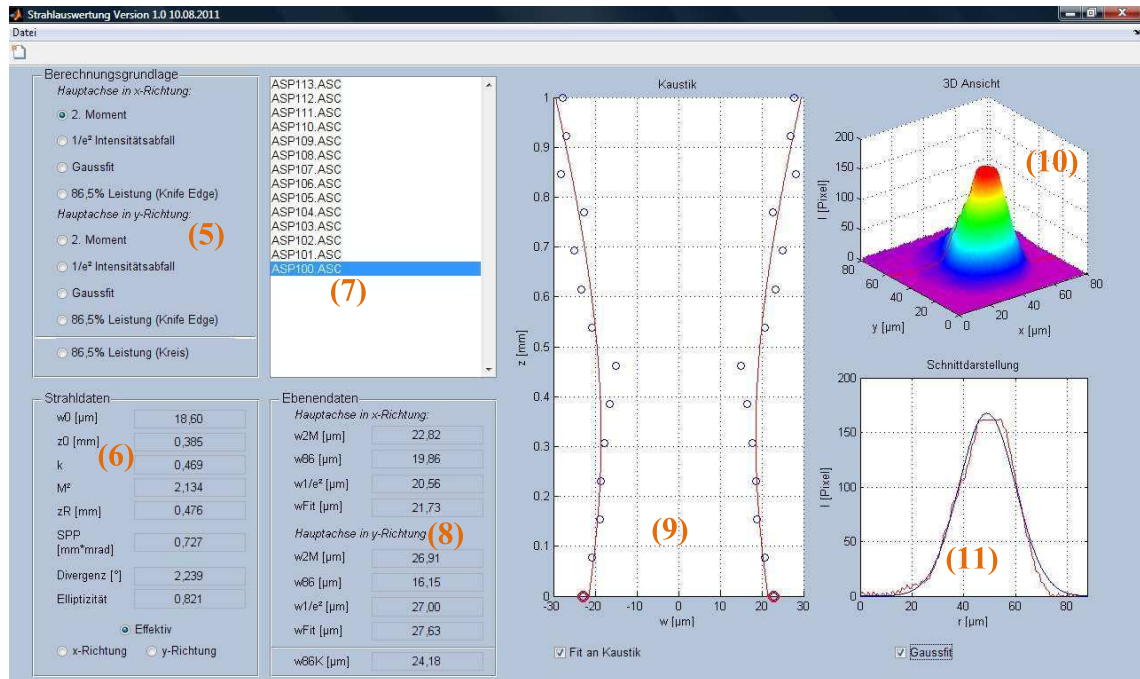
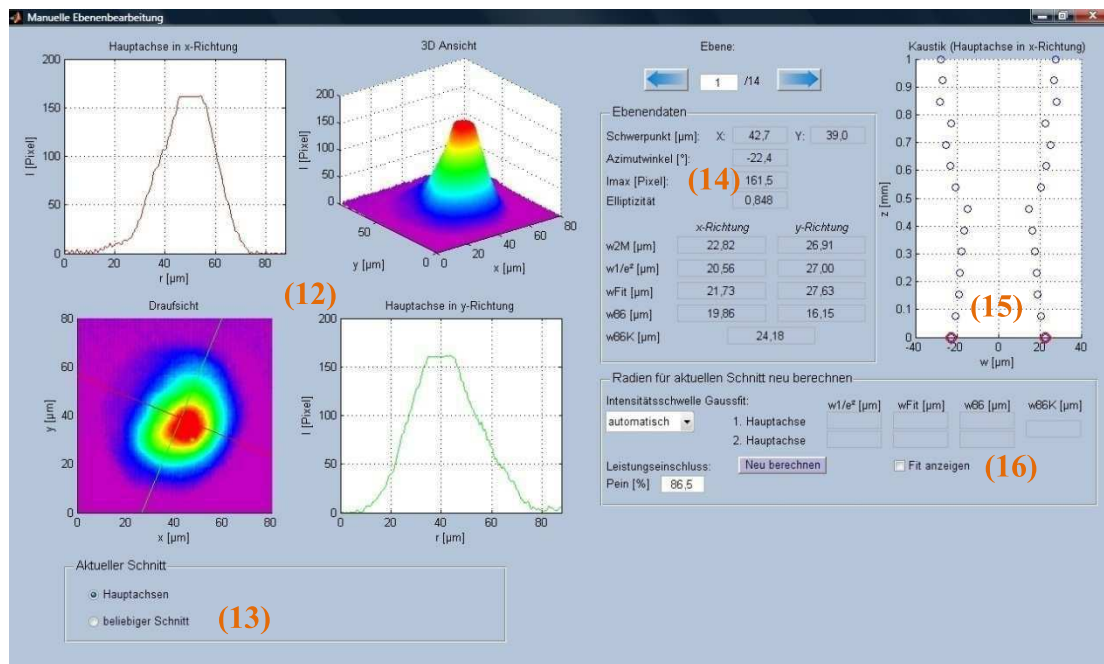


Abb. 3-2 Programmoberfläche nach dem Einlesevorgang

Bereich (5) und (7) stellen Navigationsbereiche dar. In (5) kann gewählt werden, welche Radiusdarstellung in (9) bzw. welche Schnittdarstellung in (11) angezeigt werden soll. Je nachdem welche zusätzlichen Radien vom Benutzer ausgewählt wurden, stehen diese zur Verfügung. Im Panel (6) werden die berechneten Strahlparameter ausgegeben. Zwischen Effektivwert und den einzelnen Werten für die  $x$ - und  $y$ -Richtung kann gewechselt werden. Bereich (7) enthält die Namen der Ebene und durch einen Klick auf ein Element wird dieses in (9) markiert, in (10) dreidimensional angezeigt und der dazugehörige Schnitt in (11) dargestellt. Alle ermittelten Radien der jeweiligen Ebene werden in (8) dargestellt und in (9) grafisch abgebildet. Zusätzlich kann ein hyperbolischer Fit über die Radien in (9) als Strahlkaustik dargestellt werden und falls der Gaußfit beim Einlesen ausgewählt wurde, kann dieser noch in (11) optional angezeigt werden.

Durch einen Klick mit der rechten Maustaste in (10) kann eine Einzeldarstellung der gerade aktiven Ebene oder die manuelle Ebenenbearbeitung (Abb. 3-3) gewählt werden.



**Abb. 3-3** Programmoberfläche für manuelle Bearbeitung

In der manuellen Ebenenbearbeitung ist eine detailliertere Ansicht verfügbar (12). Die dreidimensionale Ansicht, eine Draufsicht, sowie die Schnitte durch beide Hauptachsen sind möglich. Eine manuelle Schnittansicht kann unter (13) gewählt werden. Zur Berechnung werden der Bezugspunkt und der Winkel zwischen 1. Hauptachse und  $x$ -Achse benötigt. Im Bereich (14) werden neben den bereits unter (8) angezeigten Radien auch der Schwerpunkt, der Azimutwinkel, die maximale Intensität sowie die Elliptizität der gewählten Schnittebene dargestellt. Damit der Benutzer eine Orientierung hat, an welcher Position er sich befindet, wird die aktuelle  $z$ -Position noch einmal in (15) verdeutlicht. Bei der Auswahl eines manuellen Schnittes, können unter (16) von diesem Schnitt die jeweiligen Radien berechnet werden. Dabei besteht zusätzlich die Möglichkeit zur freien Eingabe der eingeschlossenen Leistung.

### 3.2.2 Verschiedene Methoden zur Radiusberechnung

In diesem Abschnitt soll der Unterschied zwischen den einzelnen Radiusdefinitionen kurz verdeutlicht und erklärt werden. Auf eine ausführliche Beschreibung der einzelnen Algorithmen wird dabei verzichtet und wieder auf den Simulationsbeleg [Olb22010] verwiesen. Da diese Radiusdefinitionen im wellenoptischen Programm im Auswertungsbereich implementiert werden sollen, sind sie noch einmal explizit in diesem Forschungsbericht aufgegriffen.

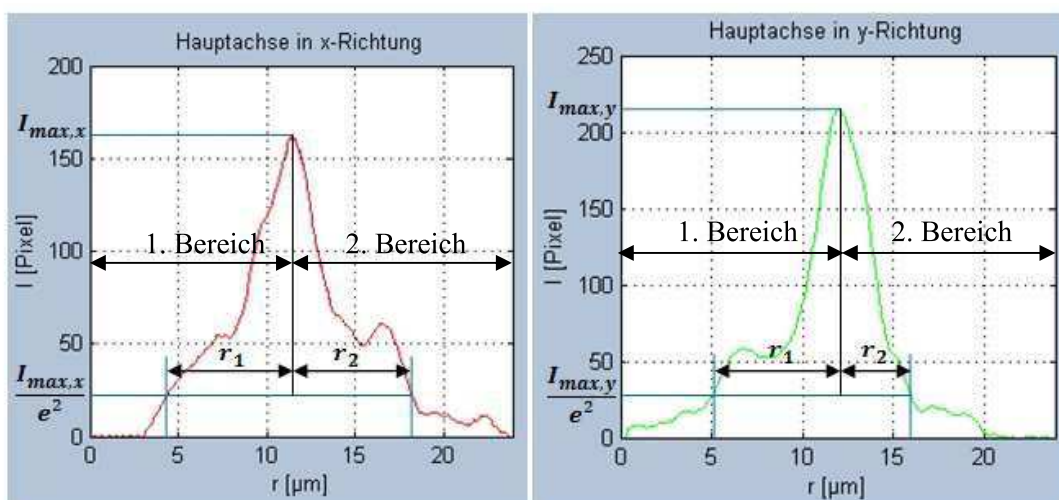


### 3.2.2.1 2. Moment

Die Berechnung der Strahlbegrenzungen auf Basis des 2. Momentes erfolgt mit denen unter 3.1.1 und 3.1.2 beschriebenen Formeln. Sie wurden numerisch umgesetzt. Aus den erhaltenen Parametern können dann die unter 3.1.3 beschriebenen weiteren Strahlparameter, wie Tailenradius oder Tailenposition bestimmt werden. Nach DIN ISO EN 11146-1 [DIN2005-1] ist die Bestimmung der weiteren Strahlparameter nur mit den Strahlmessungen auf Basis des 2. Momentes erlaubt. Für die nachfolgenden Radiusdefinitionen ist eine Bestimmung nicht zulässig. Um einen Unterschied über die sich dabei ergebenden Ergebnisse zu zeigen, wurde eine Berechnung der weiteren Parameter dennoch für die weiteren Radiusdefinitionen implementiert.

### 3.2.2.2 $1/e^2$ Intensitätsabfall

Zur Berechnung des Abfalls der Intensität auf  $1/e^2$  werden zunächst die Hauptachsen als Schnitt abgebildet. Der Schnitt wird durch eine Geradengleichung erzeugt. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wird zwischen den Pixeln interpoliert. Wurden die Schnitte ermittelt, muss zunächst das Maximum des jeweiligen Schnittes gefunden werden. Der Schnitt wird in 2 Bereiche eingeteilt. Der 1. Bereich reicht vom Anfang bis zum Maximum, der 2. vom Maximum bis zum Ende. Im 1. Bereich wird der Radius ermittelt, bei welchem zum 1. Mal  $I_{max}/e^2$  überschritten, im 2. Bereich  $I_{max}/e^2$  unterschritten wird. Aus diesen beiden Werten wird anschließend der Durchschnitt gebildet, welcher als Radius auf Basis eines Abfalls der maximalen Intensität auf  $1/e^2$  angegeben wird. Um die Funktionsweise zu verdeutlichen, sind die ermittelten Radien für ein gewähltes Beispiel in **Abb. 3-4** dargestellt.



**Abb. 3-4** ermittelte Radien für  $1/e^2$  Intensitätsabfall

### 3.2.2.3 Gaußfit

Eine direkte Approximation eines Gaußprofils ist in Matlab nicht möglich. Daher muss ein Umweg über Polynome gegangen werden, da dafür vorgefertigte Funktionen existieren. Betrachtet wird im Weiteren eine gaußförmige Intensitätsverteilung in einer Koordinatenrichtung und an einer festen Position  $z$ , deren Schwerpunkt sich nicht im Ursprung befindet:

$$I(x) = I_0 \cdot \exp\left(-2 \frac{(x - \bar{x})^2}{w^2}\right)$$

Durch Bildung des natürlichen Logarithmus ergibt sich eine quadratische Funktion:

$$\ln I(x) = -\frac{2}{w^2}x^2 + \frac{4}{w^2}x\bar{x} + \ln I_0 - \frac{2}{w^2}\bar{x}^2$$

Daher müssen nur die Koeffizienten einer quadratischen Funktion durch den Befehl `p = polyfit(x, y, 2)` bestimmt werden. Die zu ermittelnde Funktionsgleichung hat folgende Form:

$$f(x) = p(1)x^2 + p(2)x + p(3)$$

Die Koeffizienten werden im Vektor `p` zurück gegeben. Aus den Koeffizienten können dann die Parameter über:

$$p(1) = -\frac{2}{w^2}$$

$$p(2) = \frac{4}{w^2}\bar{x}$$

$$p(3) = \ln I_0 - \frac{2}{w^2}\bar{x}^2$$

bestimmt werden. Der Algorithmus wird in der Datei `gaussfit.m` ausgeführt.

Um den Unterschied zwischen den einzelnen Radien zu verdeutlichen, werden der ermittelte Gaußfit und der zugehörige Radius in **Abb. 3-5** veranschaulicht.

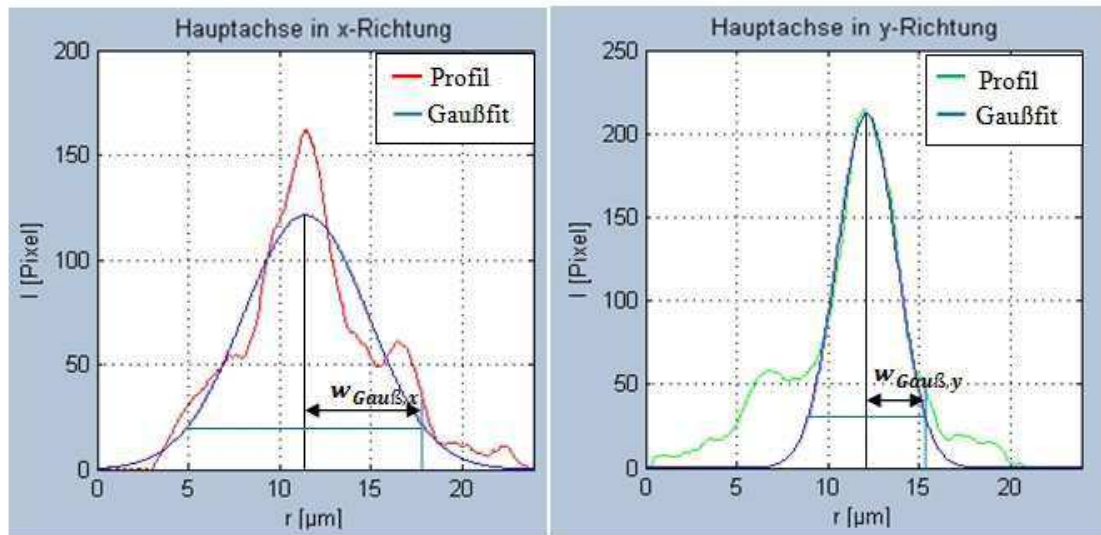


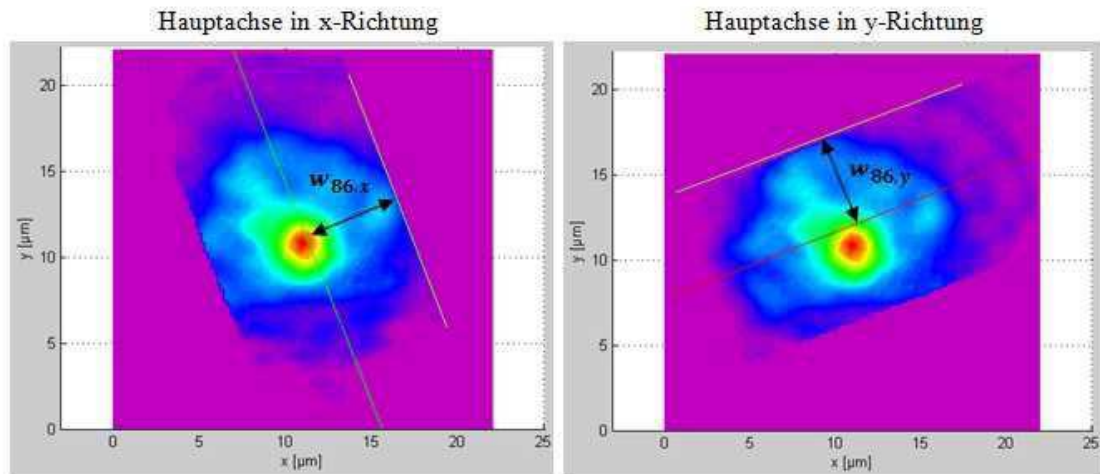
Abb. 3-5 mittels Gaußfit bestimmtes Gaußprofil sowie Radius

### 3.2.2.4 86,5 % Leistungseinschluss im Querschnitt (Knife Edge)

Für die Bestimmung des Radius auf dieser Grundlage muss zunächst eine Koordinatentransformation durchgeführt werden. Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten werden um den Azimutwinkel  $\varphi$  um die  $z$ -Achse gedreht. Dabei muss das Vorzeichen des Winkels gedreht, sowie der Winkel um  $90^\circ$  verschoben werden, damit die Definition des Drehwinkels mit der des Azimutwinkels übereinstimmt. Weiterhin muss die Menge aller verschiedenen  $x$ -Werte, über den Befehl `unique()` sowie die neue Position des Schwerpunktes nach der Transformation bestimmt werden. Von diesem Schwerpunkt aus werden die  $x$ -Werte nun nach links und rechts in gleichen Schritten durchlaufen und deren Position im transformierten Strahlprofil gesucht. Von den gefundenen Positionen wird die Leistung ermittelt und zur bisherigen Gesamtleistung dazu addiert. Die eingeschlossene Leistung wird vor Beginn des Algorithmus auf 0 gesetzt.

Die gefundenen Positionen entsprechen einem Streifen parallel zur jeweiligen Hauptachse. Werden 86,5 % eingeschlossener Leistung überschritten, bricht der Algorithmus ab, da die Anfangsbedingung nicht mehr erfüllt ist. Sind beide Stellen an ihrem Extremwert (links: 0, rechts: der größte  $x$ -Wert) angelangt, wird die eingeschlossene Leistung auf 86,5 % von  $P$  gesetzt. Der genannte Extremfall wird im Falle von 86,5 % eingeschlossener Gesamtleistung nie erreicht werden. In der manuellen Ebenenbearbeitung kann der Benutzer jedoch selbst entscheiden, wie viel Prozent der Gesamtleistung eingeschlossen werden. Für Werte nahe 100 % kann der Algorithmus zu einer Endlosschleife führen. Deshalb ist in diesem Fall die Abbruchbedingung notwendig. Beträgt die eingeschlossene Leistung den gewünschten Anteil, wird aus der Differenz von linker und rechter Seite der Strahlradius ermittelt.

Um das Prinzip dieser Radiusermittlung noch einmal zu verdeutlichen, sind der ermittelte Radius und das in diesem Radius eingeschlossene Strahlprofil in der Draufsicht in **Abb. 3-6** dargestellt.

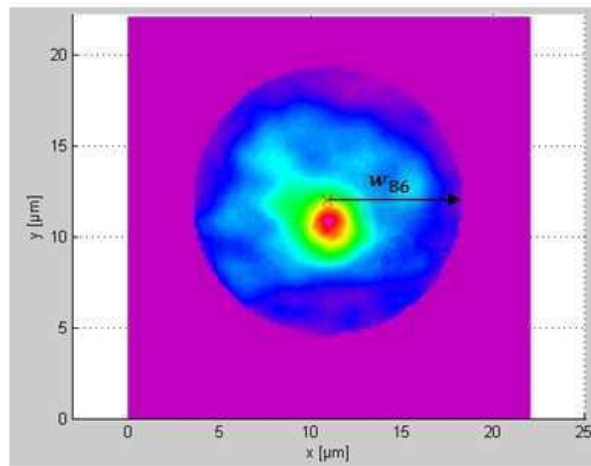


**Abb. 3-6** Eingeschlossenes Strahlprofil bei 86,5 % Gesamtleistung in Richtung der beiden Hauptachsen

### 3.2.2.5 86,5 % Leistungseinschluss als Kreis um den Schwerpunkt (Encircled Power)

Der Berechnungsalgorithmus ist an den mit 86,5 % Leistungseinschluss im Querschnitt angelehnt. Der Unterschied besteht darin, dass vom Schwerpunkt aus konzentrisch nach außen gegangen wird und keine Koordinatentransformation erforderlich ist. Die Koordinaten müssen aber als Radialkoordinaten  $R$  mit dem Ursprung im Schwerpunkt vorliegen. Von den Radialkoordinaten  $R$  wird die Menge aller verschiedenen Koordinaten bestimmt. Von der 1. Stelle beginnend wird nun der Reihe nach vorgegangen. Jede Radialkoordinate entspricht einem konzentrischen Ring um den Schwerpunkt. Von jedem Ring wird die Leistung berechnet und zur bisherigen eingeschlossenen Leistung addiert, welche zu Beginn auf 0 gesetzt wurde. Werden 86,5 % eingeschlossener Leistung überschritten, bricht der Algorithmus ab. Der gesuchte Radius ist dann die ermittelte Stelle minus 1, da der Algorithmus erst beim Überschreiten des gewünschten Leistungsanteils abbricht. Der Unterschied zwischen der ermittelten Stelle und der Stelle-1 ist jedoch sehr gering.

Um den Unterschied zwischen der Knife Edge-Methode und der Encircled Power-Methode zu verdeutlichen, ist letztere in **Abb. 3-9** dargestellt.



**Abb. 3-9** Eingeschlossenes Strahlprofil bei 86,5 % Gesamtleistung konzentrisch um den Schwerpunkt

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Die Untersuchungen zur Interpolation auf der Zielfläche haben gezeigt, dass mit deren Hilfe Rechenzeit eingespart werden kann. Der Zusammenhang zwischen zu interpolierenden Elementen in Prozent zu Einsparung an Rechenzeit in Prozent ist linear. Die Interpolation kann jedoch bei großen Unterschieden in der Ausdehnung von Abstrahl- und Zielfläche nur bis zu einem gewissen Grad erfolgen. Detaillierte Untersuchungen zu dieser Problematik müssen durchgeführt werden um eine Regel bzw. wenn möglich sogar eine Formel aufzustellen bei welchen Parametern wie viel Prozent der Elemente auf der Zielfläche interpoliert werden können.

Weiterhin konnte gezeigt werden, dass eine Verwendung von Grafikkarten sehr viel kürzere Berechnungszeiten als die Berechnung über den PC-Prozessor ergibt. Nur Grafikkarten, welche Double-Precision unterstützen, kommen für eine Verwendung in Frage. Eine NVidia Tesla-Karte sollte für die Berechnungen noch besser geeignet sein, als die im Test verwendeten Grafikkarten.

Zur weiteren Verkürzung der Berechnungsdauer sind die Berechnungsvarianten, welche eine FFT beinhalten sehr gut geeignet. Sie ermöglichen eine Flächenabstrahlung in sehr kurzer Zeit. Der einzige bisher bekannte Nachteil dieser Varianten ist die Einschränkung der Berechnung für Ebenen. Eine Berechnung für gekrümmte Flächen ist derzeit nicht möglich. Eine Möglichkeit diese Einschränkung zu beheben wäre eine Einteilung der Abstrahlfläche in Ringe auf denen die  $z$ -Koordinate konstant ist und eine separate Berechnung für jeden Ring. Ob diese Variante zu einem sinnvollen Ergebnis führt, werden weitere Untersuchungen zeigen.

Aus den unter **2.1** vorgestellten Berechnungsalternativen konnte die Korrektheit und der Nutzen von fünf Varianten (neben dem Kirchhoff-Fresnelschen Beugungsintegral das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral, die Fresnel-Näherung als Summation und als FFT sowie das Winkelspektrum ebener Wellen) nachgewiesen werden. Diese Varianten wurden noch nicht auf ihre numerischen Eigenschaften und die sich damit ergebende maximale Elementgröße bei verschiedenen Parametern untersucht. Weiterhin wurde auch nur die Berechnungsdauer von gleichen Elementgrößen verglichen. Die Berechnungsdauer mit optimierten, d.h. maximal möglichen Elementgrößen sowie Einschränkungen der Verfahren müssen in weiteren Tests und Untersuchungen ermittelt werden.

Mit Hilfe der aktuellen Version der Strahldiagnosesoftware sind die notwendigen Strahlparameter berechenbar. Durch Vergleichsmessungen mit professionellen Programmen, wie z.B. PRIMES LaserDiagnoseSoftware, konnten die Ergebnisse bestätigt werden. Weiterhin bietet das eigene Programm eine größere Flexibilität in Bezug auf die Messdatenauswertung

sowie –darstellung. Zusätzliche Funktionen und Unterprogramme können problemlos implementiert werden und der Algorithmus kann beliebig abgeändert werden, was bei professionellen Programmen nicht der Fall ist.

Somit lässt sich sagen, dass diese Möglichkeit der Strahlauswertung sehr gut geeignet ist. Allen Berechnungen liegen die Berechnungsgrundlagen nach DIN EN ISO 11146-1:2005, DIN EN ISO 11146-2:2005 und DIN EN ISO 11145:2008 zugrunde.

Für eine nachfolgende Version sollte die Möglichkeit bestehen, die Strahlauswertung in das Programm zur rigorosen wellenoptischen Berechnung der Strahlausbreitung sowie die verschiedenen Berechnungsalgorithmen zu implementieren. Weiterhin sollen zusätzliche Auswerte- und Darstellungsverfahren entwickelt werden.

## I. Literaturverzeichnis

- [Blog2011] URL: <http://blog.geizkragen.de/computer/pc-zubehor/nvidia-kepler-grafikkarte>  
verfügbar: 24.09.2011
- [Born1999] Born, Max: Principles of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light – 7. Auflage  
Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- [Dem2006] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik, Band 2: Elektrizität und Optik. - 4. Auflage  
Berlin: Springer, 2006
- [DIN2005-1] Laser und Laseranlagen -  
Prüfverfahren für Laserstrahlmessungen, Divergenzwinkel und Beugungsmaßzahlen -  
Teil 1: Stigmatische und einfach astigmatische Strahlen  
DIN EN ISO 11146-1:2005
- [DIN2005-2] Laser und Laseranlagen -  
Prüfverfahren für Laserstrahlmessungen, Divergenzwinkel und Beugungsmaßzahlen -  
Teil 2: Allgemein astigmatische Strahlen  
DIN EN ISO 11146-2:2005
- [DIN2008] Optik und Photonik –  
Laser und Laseranlagen -  
Begriffe und Formelzeichen (ISO 11145:2006).  
DIN EN ISO 11145:2008
- [Eip1998] Eippich, Bernd, Dissertation: Die Charakterisierung von Strahlung Felder mit der Wigner-Verteilung und deren Messung,  
Berlin: 1998
- [Hüg2009] Hügel, Helmut: Laser in der Fertigung. – 2. Auflage  
Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009
- [Jac2011] URL:<http://forums.accelereyes.com/forums/viewtopic.php?f=7&t=1633>  
verfügbar am 05.04.2011
- [NVid2011] URL: <http://www.nvidia.de/page/why-choose-tesla.html>  
verfügbar am 23.09.2011



- 
- [Olb2010] Olbich, Markus: Bachelorarbeit: Erstellung eines wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Laserstrahlpropagation nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2009
- [Olb22010] Olbrich, Markus: Simulationsbeleg: Charakterisierung der Strahlqualität  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2010
- [Trä2007] Träger, Frank: Handbook of Lasers and Optics – 1. Auflage  
New York: Springer, 2007

---

# **Abschlussbericht Forschungs- und Entwicklungsprojekt II**

---

**Markus Olbrich**

## **Untersuchung der numerischen Eigenschaften wichtiger Propagationsoperatoren**

Forschungs- und Entwicklungsprojekt II  
Wintersemester 2011/2012  
Prof. Dr. rer. nat. A. Fischer

Fakultät Mathematik/Naturwissenschaften/Informatik  
Mittweida, 16.03.2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis.....</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis.....</b>	<b>v</b>
<b>Formelverzeichnis .....</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Betrachtungen .....</b>	<b>2</b>
<b>3 Bestimmung der minimal möglichen Elementanzahl .....</b>	<b>4</b>
3.1 Das Winkelspektrum ebener Wellen.....	5
3.2 Die Fresnel-Näherung im Spektralraum .....	8
3.3 Die Fresnel-Näherung und Fraunhofer-Näherung mittels FFT.....	8
3.4 Propagationsoperatoren in Integralform.....	9
3.4.1 Linienabstrahlung.....	9
3.4.2 Flächenabstrahlung .....	13
<b>4 Berechnungen für gekrümmte Flächen .....</b>	<b>17</b>
4.1 Abstrahlung von Ebene auf gekrümmte Fläche .....	17
4.2 Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf Ebene.....	18
4.3 Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf gekrümmte Fläche .....	18
4.4 Vergleich mit Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral .....	19
<b>5 Strahlbegrenzungen .....</b>	<b>21</b>
5.1 Begrenzung der Abbildungsfläche.....	21
5.1.1 Winkelspektrum und Fresnel-Näherung im Spektralraum.....	21
5.1.2 Fresnel – und Fraunhofer-Näherung FFT .....	23
5.2 Begrenzung der Startfläche .....	26
<b>6 Abschätzung der Berechnungsdauer.....</b>	<b>31</b>
6.1 Propagationsoperatoren auf Basis der Fast Fourier-Transformation .....	31
6.2 Propagationsoperatoren auf Basis der Integration .....	35
<b>7 Vergleich der verschiedenen Operatoren anhand eines Beispiels .....</b>	<b>36</b>
7.1 Parameter .....	36

---

7.2	Abschätzung der Berechnungsdauer .....	38
7.2.1	Linienabstrahlung.....	38
7.2.2	Flächenabstrahlung .....	39
7.3	Berechnungsergebnisse.....	40
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>42</b>
<b>I</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>I</b>
<b>II</b>	<b>Anlagen: Quellcodeauszüge.....</b>	<b>II</b>
II.I	Das Winkelspektrum ebener Wellen.....	II
II.II	Die Fresnel-Näherung im Spektralraum .....	II
II.III	Die Fresnel-Näherung mittels FFT .....	II
II.IV	Die Fraunhofer-Näherung mittels FFT .....	III
II.V	Abstrahlung von Ebene auf gekrümmte Fläche .....	III
II.VI	Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf Ebene.....	III
II.VII	Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf gekrümmte Fläche .....	III
<b>III</b>	<b>Anlagen: Werte der Bessel-Funktion 1. Ordnung.....</b>	<b>V</b>

## Abbildungsverzeichnis

<b>Abb. 3-1</b> Darstellung der minimal wählbaren Elementanzahl $Nx$ in $2^x$ in Abhängigkeit des Strahlradius $w_{86}$ auf der Abstrahlfläche .....	6
<b>Abb. 3-2</b> Darstellung des Verhältnisses $V$ von Tailenradius zu Elementgröße in Abhängigkeit des Tailenradius.....	7
<b>Abb. 3-3</b> Darstellung der absoluten relativen elektrischen Feldstärke auf der Abbildungsfläche .....	9
<b>Abb. 3-4</b> Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit von der Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge; Parameter: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ .....	10
<b>Abb. 3-5</b> Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit vom Kehrwert der Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge mit linearer Regression; Parameter: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ .....	11
<b>Abb. 3-6</b> Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit der Entfernung der beiden Grenzflächen $\Delta z$ mit linearer Regression; Parameter: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ .....	11
<b>Abb. 3-7</b> Darstellung der erhaltenen normierten Feldstärkeverteilung bei Abstrahlung in die $xz$ -Ebene für: links $s\lambda = 5$ ; rechts $s\lambda = 10$ ; $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ ; $\Delta z = 5 \text{ mm}$ .....	12
<b>Abb. 3-8</b> Darstellung verschiedener Sinusschwingungen (oben dreidimensional, unten zweidimensional) mit: 9 Elementen (links) und 21 Elementen (rechts) pro Periode.....	14
<b>Abb. 3-9</b> Darstellung der erhaltenen Strahlprofile auf der Abbildungsfläche mit links: $Nx = 201$ , rechts: $Nx = 351$ .....	15
<b>Abb. 3-10</b> Darstellung der sich ergebenden Summe der quadratischen Abweichungen für verschiedene Elementanzahlen pro Periode.....	16
<b>Abb. 4-1</b> Darstellung der Abstrahlung von einer gekrümmten Fläche auf eine weitere gekrümmte Fläche unter Verwendung einer Zwischenebene .....	18
<b>Abb. 4-2</b> Darstellung der Abhängigkeit der ermittelten Berechnungsdauern für Linienabstrahlung für jeweils Fresnel spektral und Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral mit: 1: Parameter 1; 2: Parameter 2; 3: Parameter 3 .....	20
<b>Abb. 5-1</b> Darstellung erhaltenen relativen elektrischen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche mit 60% der eigentlich benötigten Ausdehnung ( $1,5w_{86}\Delta z$ ) auf der Abbildungsfläche; links: Seitenansicht; rechts: Draufsicht in anderer Farbdarstellung .....	22
<b>Abb. 5-2</b> Darstellung der beiden Teilprofile durch deren Addition die Strahlverteilung in <b>Abb. 5-1</b> erhalten werden kann.....	22
<b>Abb. 5-3</b> Darstellung der erhaltenden Strahlprofile für: links $0,5w_{86}\Delta z$ und rechts $0,75w_{86}\Delta z$ in der Draufsicht .....	23

<b>Abb. 5-4</b> Darstellung des erhaltenen Strahlprofiles bei Begrenzung der Abbildungsfläche für Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT im Vergleich mit dem nichtbegrenzten Strahlprofil berechnet mit Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral durch Linienabstrahlung.....	24
<b>Abb. 5-5</b> Darstellung der relativen Abweichungen des berechneten Strahlradius der Diagonale vom theoretischen Strahlradius in Abhängigkeit der Unterabtastung in % für verschiedene Parametersätze.....	25
<b>Abb. 5-6</b> Veranschaulichung des Verlaufs der relativen elektrischen Feldstärke der Bessel-Funktion 1. Ordnung in Abhängigkeit vom Argument $k \cdot \text{Raperture} \cdot \sin\theta$ .....	27
<b>Abb. 5-7</b> Veranschaulichung der Größen zur Bestimmung der bei Beugung notwendigen Ausdehnung $Dx'$ .....	28
<b>Abb. 5-8</b> Darstellung erhaltenen absoluten relativen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche, links: Parameter 3 $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ , rechts: Parameter 4 $w_{86} = 100 \mu\text{m}$ . 29	
<b>Abb. 5-9</b> Darstellung erhaltenen absoluten relativen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche oben: Parameter 1 $N_x = 1024$ , unten: Parameter 2 $N_x = 2048$ , links: die Feldstärkeverteilung auf der Startfläche in der Draufsicht, Mitte: die Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche in der Draufsicht, rechts: die Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche als Schnitt.....	30
<b>Abb. 6-1</b> Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung für Flächenabstrahlung .....	32
<b>Abb. 6-2</b> Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer als binärer Logarithmus in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung mit Regressionsgerade für Flächenabstrahlung .....	33
<b>Abb. 6-3</b> Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer als binärer Logarithmus in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung mit Regressionsgerade für Linienabstrahlung.....	34
<b>Abb. 7-1</b> Visualisierung der strahlenoptischen Abschätzung des gewählten Beispiels.....	36
<b>Abb. 7-2</b> Vergleich der Strahlprofile auf der 2. Grenzfläche; links: ohne Interpolation (256 Elemente); rechts: mit Interpolation (64 in 256 Elemente).....	38

## Tabellenverzeichnis

<b>Tab. 3-1</b> Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit der maximal möglichen Elementgröße von verschiedenen Parametern .....	5
<b>Tab. 4-1</b> Auflistung der erhaltenen mittleren Berechnungsdauern für Fresnel spektral und Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegral .....	19
<b>Tab. 4-2</b> Parameter zur Bestimmung der Berechnungsdauer in <b>Tab. 4-1</b> und <b>Abb. 4-2</b> .....	19
<b>Tab. 5-1</b> Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen einer Beschneidung des Strahlprofils auf der Abbildungsfläche für das Winkelspektrum ebener Wellen und die Fresnel-Näherung im Spektralraum .....	21
<b>Tab. 5-2</b> Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen einer Beschneidung des Strahlprofils auf der Abbildungsfläche die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT .....	24
<b>Tab. 5-3</b> Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen der Unterabtastung für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT .....	25
<b>Tab. 5-4</b> Parameter der in <b>Abb. 5-8</b> und <b>Abb. 5-9</b> dargestellten Feldstärkeverteilungen, Propagationsoperator: Fresnel spektral .....	28
<b>Tab. 6-1</b> erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT für Flächenabstrahlung.....	32
<b>Tab. 6-2</b> erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT für Linienabstrahlung.....	32
<b>Tab. 6-3</b> erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der Integration .....	35
<b>Tab. 7-1</b> Parameter der einzelnen Flächen zur Berechnung des Beispiels.....	36
<b>Tab. 7-2</b> Gegenüberstellung der mindestens benötigten und tatsächlich verwendeten Elementanzahl, für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral gelten die linken Angaben für Linienabstrahlung und die rechten für Flächenabstrahlung.....	37
<b>Tab. 7-3</b> Gegenüberstellung der geschätzten und tatsächlich benötigten Berechnungsdauer für Linienabstrahlung.....	39
<b>Tab. 7-4</b> Gegenüberstellung der geschätzten und tatsächlich benötigten Berechnungsdauer für Flächenabstrahlung.....	40
<b>Tab. 7-5</b> Gegenüberstellung der erhaltenen Strahlradien auf Basis 2. Moments für die verschiedenen Propagationsoperatoren.....	41
<b>Tab. 8-1</b> Zusammenfassung der ermittelten Ergebnisse.....	44

## Formelverzeichnis

Formelzeichen	Bedeutung	Maßeinheit
<i>Skalare Größen</i>		
$A_0$	Startfläche	$\text{m}^2$
$A_1$	Zielfläche	$\text{m}^2$
$D_x, D_y$	Abmessungen in $x$ -und $y$ -Richtung	$\text{m}$
$E_0$	Einfallende elektrische Feldstärke auf der Abstrahlfläche	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
$E_1$	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
$E_{\max}$	Amplitude der elektrischen Feldstärke	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
$E_m$	Relativer Anteil von der Amplitude der elektrischen Feldstärke auf der Zielfläche	—
$E_{\text{zw}}$	elektrischen Feldstärke auf der Zwischenebene	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
$F_{Ng}$	Faktor der Gesamtelementanzahl	—
$i$	Imaginäre Einheit	—
$I$	Intensität	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$I_{\max}$	Amplitude der Intensität	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$
$k_0$	Wellenzahl der elektromagnetischen Welle	$\text{m}^{-1}$
$n_0$	Brechzahl zwischen Abstrahl- und Zielfläche	—
$N(x_0, y_0, z_0)$	Neigungsfaktor	—
$N_x, N_y$	Elementanzahl in $x$ -und $y$ -Richtung	—
$N_{z_0}, N_{z_1}$	Anzahl an verschiedenen $z$ -Koordinaten der Abstrahl- und Zielfläche	—
$N_{ua}$	Unterabtastung (relativ)	—



$r$	Abstand von einem Abstrahl- zu einem Zielelement	m
$R_i$	Krümmungsradius der i-ten Grenzfläche	m
$R_{aperture}$	Begrenzungsradius	m
$s_\lambda$	Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge	—
$t_{norm}$	Normierte Berechnungsdauer	ns; ps
$w_{86}$	Strahlradius auf Basis von 86,5 % Leistungseinschluss	m
$w_{86}(\Delta z)$	Strahlradius auf der Zielfläche in der Entfernung $\Delta z$	m
$x_0, y_0, z_0$	Kartesische Koordinaten der Abstrahlfläche	m
$x_1, y_1, z_1$	Kartesische Koordinaten der Zielfläche	m
$x_J$	Argument der Bessel-Funktion	—
$x_{Jmax}$	Argument eines Maximum der Bessel-Funktion	—
$x_{NM}$	Position eines Nebenmaximums	m
$x_T$	Toleranzbereich	m
$\Delta x, \Delta y$	Elementgröße in $x$ - bzw. $y$ -Richtung	m
$\Delta z$	Abstand der planen Flächen $A_0$ und $A_1$	m
$z_{zw}$	$z$ -Koordinate der Zwischenebene	m
$\lambda_0$	Vakuumwellenlänge der elektromagnetischen Welle	m
$\nu_x, \nu_y$	Raumfrequenzen im Spektralraum	$\text{m}^{-1}$
$\Delta \nu_x, \Delta \nu_y$	Elementgröße der Raumfrequenzen in $x$ - und $y$ -Richtung	m

### Vektoren

$\vec{e}_r$	Einheitsvektor des Vektors $\vec{r}$	—
$\vec{k}$	Wellenzahlvektor der einfallenden elektromagnetischen Welle	m

$\vec{n}_0$	Einheitsvektor der Flächennormalen $\vec{n}$ der Abstrahlfläche	—
$\vec{n}$	Flächennormalen der Abstrahlfläche	m

Quellcodeauszüge

A	Hilfsmatrix zur Separation	—
D	Ausdehnung auf der Flächen für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT	m
dfx	Elementgröße der Raumfrequenzen in $x$ -Richtung	$m^{-1}$
dx	Elementgröße in $x$ -Richtung	m
dz	Entfernung von Abstrahl- und Zielfläche	m
E0	Elektrische Feldstärke auf der Abstrahlfläche	$\frac{V}{m}$
E1	Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche	$\frac{V}{m}$
E <sub>max</sub>	Amplitude der elektrischen Feldstärke	$\frac{V}{m}$
E <sub>zw</sub>	Elektrische Feldstärke auf der Zwischenebene	$\frac{V}{m}$
FF	Vorfaktor für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT, enthält die Phaseninformation und muss auf Eins normiert werden um die Amplitude nicht zu verfälschen	—
f <sub>x0</sub>	Raumfrequenzen in $x$ -Richtung als Vektor	$m^{-1}$
f <sub>x</sub> , f <sub>y</sub>	Raumfrequenzen in $x$ - und $y$ -Richtung als Matrix	$m^{-1}$
k	Wellenzahl	$m^{-1}$
lambda	Wellenlänge	m
n0	Brechzahl zwischen Abstrahl- und Zielfläche	—
n <sub>x</sub>	Elementanzahl in $x$ -Richtung	$\frac{V}{m}$
X1, Y1	Koordinaten der Zielfläche als Matrix	m
X <sub>max1</sub>	Maximale Ausdehnung in $x$ -Richtung auf der Zielfläche	m
w0	Strahlradius auf der Abstrahlfläche	m

$z_0, z_1$	$z$ -Koordinate der Abstrahl- und Zielfläche	m
$z$	Alle verschiedenen $z$ -Koordinaten der Abstrahlfläche	m
$z_z$	Alle verschiedenen $z$ -Koordinaten der Zielfläche	m

### Berechnungsvorschriften

$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation	—
$\mathcal{F}^{-1}$	Inverse Fourier-Transformation	—

## 1 Einleitung

Im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsmoduls II wurden umfassende numerische Untersuchungen in Bezug auf die bereits im Forschungs- und Entwicklungsmodul I ermittelten in Frage kommenden Propagationsoperatoren durchgeführt (vgl. [Olb2010] Kap. **2.1** und Kap. **2.2.5**). Im Fokus standen dabei die Algorithmen auf Basis der Fast Fourier Transformation (FFT), d. h. das Winkelspektrum ebener Wellen sowie die Fresnel-Näherung im Spektralraum. Neben diesen Operatoren existieren noch die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung auf Basis der FFT und vier weitere Operatoren in Integralform. Dazu zählen das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral, das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral sowie dessen Näherungen nach Fresnel und Fraunhofer.

Bisher wurde die Berechnungsdauer für die genannten Operatoren nur für die ungestörte Strahlpropagation durchgeführt. Das bedeutet jeweils von einer planen Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zu einer anderen planen Fläche. Komplexe optische Systeme enthalten jedoch auch gekrümmte Flächen, Verkippungen und unregelmäßige und begrenzende Formen. Für solche Fälle wurden im folgenden Forschungs- und Entwicklungsbeleg Untersuchungen durchgeführt.

Weiterhin ist eine Abschätzung der Berechnungsdauer von besonderer Bedeutung. Für alle genannten Propagationsoperatoren wurde daher versucht eine analytische Formel aufzustellen.

## 2 Theoretische Betrachtungen

Mögliche Propagationsoperatoren für die Berechnung der Strahlausbreitung wurden bereits im Forschungsbeleg I (siehe [Olb2010]) vorgestellt. Diese sind nachfolgend kurz ohne weitere Erklärungen aufgelistet. Zur Erklärung der Variablen wird ebenfalls auf den bereits angefertigten Forschungsbeleg verwiesen. Die numerische Umsetzung der verwendeten Operatoren ist unter: Anlagen: Quellcodeauszüge, zu finden.

*Das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral:*

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \cdot \iint_{A_0} \frac{E_0(x_0, y_0, z_0)}{r} \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r} \cdot N(x_0, y_0, z_0) dA_0 \quad (2-1)$$

mit  $N(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} (\cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r) - \cos(\vec{n}_0, \vec{k}))$

$$\text{und } r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

*Das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral:*

$$E_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \iint_{A_0} E_0 \cdot \frac{(1 - i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r) \cdot e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot r}}{r^2} \cdot N(x_0, y_0, z_0) dA_0 \quad (2-2)$$

mit  $N(x_0, y_0, z_0) = \cos(\vec{n}_0, \vec{e}_r)$

$$\text{und } r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

*Die Fresnel-Näherung in Integralform:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \iint_{A_0} E_0 \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0^2 + y_0^2)} \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0 x_1 + y_0 y_1)} dx_0 dy_0 \quad (2-3)$$

*Die Fresnel-Näherung im Spektralraum:*

$$E_1 = e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \Delta z} \cdot \mathcal{F}^{-1} \left[ \mathcal{F}(E_0) \cdot e^{-i \pi \frac{\lambda_0 \cdot \Delta z}{n_0} (v_x^2 + v_y^2)} \right] \quad (2-4)$$

*Das Winkelspektrum ebener Wellen:*

$$E_1 = \mathcal{F}^{-1} \left( \mathcal{F}(E_0) \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot \Delta z \cdot \sqrt{\frac{n_0^2}{\lambda_0^2} - (v_x^2 + v_y^2)}} \right) \quad (2-5)$$

Anzumerken ist, dass das Winkelspektrum ebener Wellen dem Rayleigh-Sommerfeldschem Beugungsintegral entspricht (vgl. [Trä2007]). Die Raumfrequenzen für (2-4) und (2-5) berechnen sich nach:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x = \frac{1}{N_x} \quad v_x = -\frac{N_x}{2} \Delta v_x \dots \frac{N_x}{2} \Delta v_x \quad (2-6)$$

Die Elementgröße wird bestimmt durch:

$$\Delta x = \frac{D_x}{N_x - 1} \quad (2-7)$$

Weiterhin existieren noch die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation DFT:

*Die Fresnel-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F} \left( E_0 \cdot e^{-\frac{i \cdot n_0 \cdot k_0}{\Delta z} (x_0^2 + y_0^2)} \right) \quad (2-8)$$

*Die Fraunhofer-Näherung mittels diskreter Fourier-Transformation:*

$$E_1 = \frac{n_0}{i \cdot \lambda_0} \frac{e^{i \cdot n_0 \cdot k_0 \cdot \left( \Delta z + \frac{x_1^2 + y_1^2}{2 \Delta z} \right)}}{\Delta z} \cdot \mathcal{F} (E_0) \quad (2-9)$$

Die Raumfrequenzen für (2-8) und (2-9) berechnen sich nach:

$$v_x = \frac{n_0 \cdot k_0}{2\pi \cdot \Delta z} x_1 = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} x_1 \quad v_y = \frac{n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0} y_1 \quad (2-10)$$

Durch geeignete Wahl des Koordinatensystems mit:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}} \quad (2-11)$$

stimmen die Koordinaten mit den Raumfrequenzen überein und (2-8) und (2-9) können auch als FFT ausgeführt werden. Die Beziehungen gelten in gleicher Weise für die y-Richtung. Daher wird auf diese in den weiteren Betrachtungen nicht explizit eingegangen. Durch (2-7) ist somit auch die Abgrenzung der Flächen vorgegeben.

Zur Unterscheidung von (2-4) und (2-8) wird (2-4) fortan als Fresnel spektral bezeichnet und (2-8) als Fresnel FFT.

### 3 Bestimmung der minimal möglichen Elementanzahl

Die Berechnung der Strahlpropagation mit Hilfe numerischer Methoden kann je nach Wahl der Parameter einen sehr langen Zeitraum in Anspruch nehmen. Ein wichtiger Parameter zur Beeinflussung der Berechnungsdauer ist die Elementgröße. Im Rahmen der Bachelorarbeit wurde bereits für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral **(2-1)** eine empirisch ermittelte Formel für die maximal mögliche Elementgröße bestimmt [Olb22010]:

$$s_\lambda = 0,2553 \cdot \frac{\Delta z}{w_{86}} \quad (3-1)$$

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{n_0} \cdot s_\lambda \quad (3-2)$$

Daraus ergibt sich mit **(2-7)** die minimal mögliche Elementanzahl durch:

$$N_x \geq \frac{D_x \cdot w_{86} \cdot n_0}{0,2553 \cdot \lambda_0 \cdot \Delta z} + 1 \quad (3-3)$$

Für die unter **2** aufgeführten Operatoren wurde ebenfalls versucht eine solche Formel wie **(3-3)** zu bestimmen. Weiterhin zeigten Untersuchungen, dass **(3-1)** nur unter der Bedingung  $D_x = 4 \cdot w_{86}$  gilt. Daher wurde versucht eine allgemeinere Formel für die Abschätzung der benötigten Elementanzahl des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals aufzustellen. Für Propagationsoperatoren in Integralform gilt die gleiche Elementgröße.

Berechnungsvarianten auf Basis der FFT sind für Berechnung der ungestörten Strahlpropagation, d. h. ohne begrenzende Elemente, von einer zur z-Achse senkrechten Ebene zu einer anderen Ebene geeignet. Für andere Anwendungsfälle, wie gekrümmte Flächen und Blenden, sind die Verfahren nur bedingt geeignet, was unter **4** und **5** zu sehen ist. Daher werden in den folgenden Unterkapiteln nur Berechnungen mit planen Flächen ohne Eingrenzungen des Strahles verwendet.

Untersucht wurde jeweils der Einfluss der Entfernung von Abstrahl- und Zielfläche  $\Delta z$  sowie der des Strahlradius  $w_{86}$  und der Begrenzung  $D_x$ . Die dabei verwendeten Parameter waren für alle Untersuchungen annähernd gleich und werden deshalb nur einmal in **Tab. 3-1** aufgeführt. Die explizierte Aufführung aller verschiedenen Parameter **Tab. 3-1** in sowie in den nachfolgenden Diagrammen und aller Untersuchungen hätte den Umfang deutlich erhöht. Daher sind nur die wichtigsten Ergebnisse sowie der Parameterbereiche aufgeführt. In den Diagrammen sind noch einmal separat die wichtigsten Parameter gekennzeichnet.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$	Ebene	Ebene
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 1 - 35 \text{ mm}$
Gaußstrahl	Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}}$ : FFT: $2,5 \cdot w_{86}(\Delta z)$ Integralformen: $2,5 \cdot w_{86}$	Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 2,5 \cdot w_{86}(\Delta z)$
$w_{86} = 5 - 1500 \mu\text{m}$	Elementgröße: variabel	Elementanzahl: FFT: wie Startfläche Integralformen: 201
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

**Tab. 3-1** Parameter zur Untersuchung der Abhängigkeit der maximal möglichen Elementgröße von verschiedenen Parametern

### 3.1 Das Winkelspektrum ebener Wellen

Im Rahmen des Beleges konnte keine Abhängigkeit der Elementgröße vom Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche festgestellt werden. Daher wurde in **Abb. 3-1** nur die minimal wählbare Elementanzahl anstelle der Elementgröße dargestellt, da sie den Sachverhalt besser beschreibt.

Für das gewählte Beispiel war ab einem Strahlradius von  $50 \mu\text{m}$  für den Erhalt einer exakten Lösung eine Elementanzahl von 64 Elementen in  $x$ - und  $y$ - Richtung notwendig. Diese Mindestelementanzahl konnte auch bei weiteren Untersuchungen, die hier nicht explizit aufgeführt sind, festgestellt werden. Aufgrund dessen kann von einer Mindestelementanzahl von 64 Elementen in einer Raumrichtung ausgegangen werden. Einzig Diskretisierungsfehler fallen aufgrund der großen Elementgröße im Vergleich zum Strahlradius mit relativen Abweichungen im einstelligen Prozentbereich ins Gewicht.

Eine größere Elementanzahl muss hingegen für Strahlradien kleiner als  $50 \mu\text{m}$  gewählt werden. Der Grund ist, dass für die gewählten Parameter die Gaußstrahlen für einen kleiner werdenden Tailenradius  $w_0 = w_{86}$  eine größere Divergenz und somit bei konstanter und hinreichender Entfernung  $\Delta z$  einen größeren Strahlradius besitzt, der sich nach:

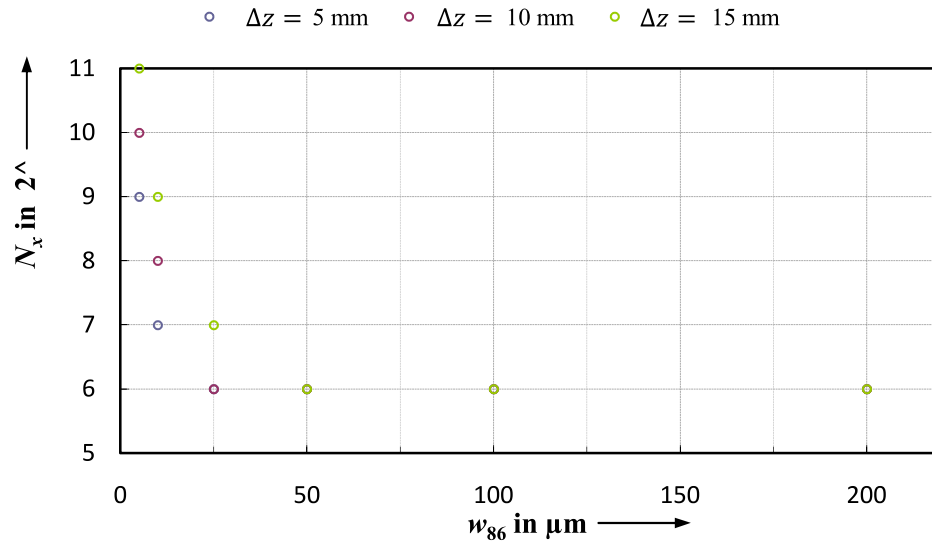
$$w_{86}(\Delta z) = w_0 \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta z \cdot \lambda}{\pi \cdot w_0^2} \right)^2} \quad (3-4)$$

berechnet. Für eine beugungsfreie Abbildung wurde für die Ausdehnung die Beziehung:

$$D_x = 5 \cdot w_{86}(\Delta z) \quad (3-5)$$

festgelegt. Da sich nach (3-4) und (3-5) die Ausdehnung bei gleichbleibender Elementanzahl  $N_x$  erhöht, steigt dementsprechend nach (2-7) die Elementgröße  $\Delta x$ .

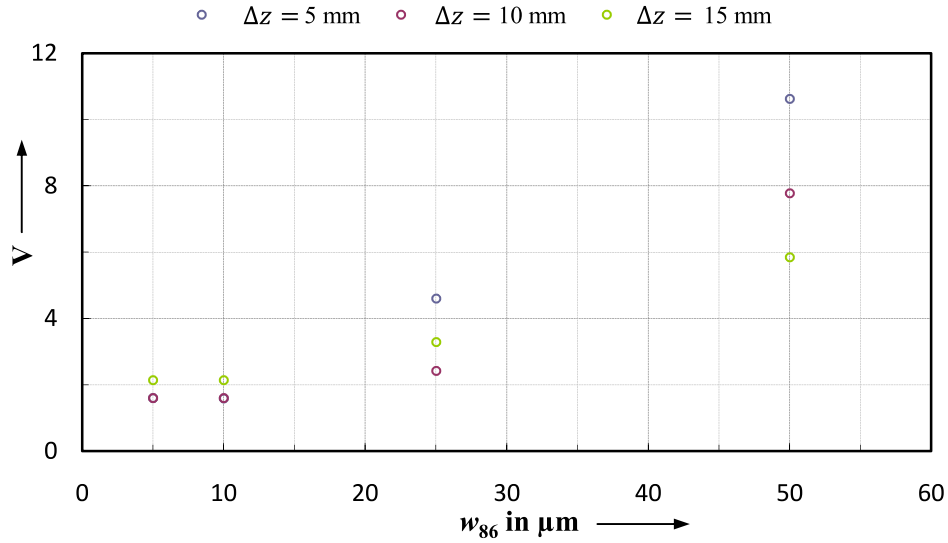




**Abb. 3-1** Darstellung der minimal wählbaren Elementanzahl  $N_x$  in  $2^k$  in Abhängigkeit des Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche

Nimmt das Verhältnis von Tailenradius zu Elementgröße nun einen kritischen Wert an, werden die Diskretisierungsfehler zu groß und das Berechnungsergebnis ist unbrauchbar. Die Diskretisierungsfehler beinhalten die Approximation eines glatten Strahlprofils durch rechteckige Pixel sowie des exakten Verlauf von Real- und Imaginärteil. Die Problematik der exakten Berechnung des Real- und Imaginärteils wurde bereits im Forschungsbeleg I in Bezug auf eine mögliche Interpolation [Olb2010] diskutiert und wird auch in Kapitel 3.4.2 Thematik sein. Probleme wie unter 3.4.2 konnten für das Winkelspektrum nicht festgestellt werden. Der Grund ist, dass bei der Fourier-Transformation das komplette Strahlprofil auf der Abbildungsfläche berechnet wird und keine Interpolationen notwendig sind.

Zur Ermittlung des notwendigen Verhältnisses  $V$  von Tailenradius zu Elementgröße wurden die aus **Abb. 3-1** ermittelten Werte noch einmal mit dem eben genannten Verhältnis in **Abb. 3-2** dargestellt.



**Abb. 3-2** Darstellung des Verhältnisses  $V$  von Tailenradius zu Elementgröße in Abhängigkeit des Tailenradius

Anhand des Graphen in **Abb. 3-2** ist ab einem Schwellwert eine annähernd lineare Abhängigkeit des Verhältnisses  $V$  vom Tailenradius zu erkennen. Weiterhin ist das Verhältnis für größere Entfernungen  $\Delta z$  höher. Die Ursache ist hier die größere Ausdehnung  $D_x$  der Flächen mit zunehmender Entfernung. Ein Mindestverhältnis von etwa 1,6 ist ersichtlich. Mit Hilfe des Mindestverhältnisses sowie der Kenntnis der Minimalelementanzahl von 64 kann die minimal benötigte Elementanzahl wie folgt abgeschätzt werden:

$$1,6 \leq \frac{w_{86}}{\Delta x} \quad (3-6)$$

Zusammen mit (2-7) und der Bedingung, dass die Elementanzahl immer ein natürliches Vielfaches von 2 sein muss, ergibt sich somit:

$$N_x \geq \begin{cases} a & \text{für } a > 64 \\ 64 & \text{für } a \leq 64 \end{cases} \quad (3-7)$$

$$\text{mit } a = 2^{\text{nextpow2}\left(1,6 \cdot \frac{D_x}{w_{86}} + 1\right)}$$

Der MATLAB-Befehl `nextpow2` gibt die nächst höchste Zweierpotenz zurück.

Die Untersuchungen beinhalteten bereits die Untersuchung der Abhängigkeit von der Entfernung  $\Delta z$ . Eine explizite Untersuchung ist demnach nicht notwendig, da die Abhängigkeit von  $\Delta z$  indirekt in der Ausdehnung  $D_x$  enthalten ist.

### 3.2 Die Fresnel-Näherung im Spektralraum

Die Untersuchungen zur Bestimmung der minimal möglichen Elementanzahl der Fresnel-Näherung im Spektralraum ergaben die gleichen Ergebnisse wie für die Untersuchungen des Winkelspektrums ebener Wellen. Die minimal benötigte Elementanzahl kann mit (3-7) abgeschätzt werden.

### 3.3 Die Fresnel-Näherung und Fraunhofer-Näherung mittels FFT

Die empirisch ermittelten Regeln unter 3.1 bzgl. Elementanzahl und -größe gelten auch für diese Operatoren. Die minimal benötigte Elementanzahl kann jedoch auch mit Hilfe von (2-11) und (2-7) bestimmt werden. Wird (2-11) zunächst in (2-7) eingesetzt, ergibt sich für die Ausdehnung:

$$D_x = (N_x - 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}} \quad (3-8)$$

Durch Umstellen von (3-8) nach  $N_x$  unter der Annahme  $N_x - 1 \cong N_x$  wird die minimale Elementgröße nach:

$$N_x \geq \begin{cases} a & \text{für } a > 64 \\ 64 & \text{für } a \leq 64 \end{cases} \quad (3-9)$$

$$\text{mit } a = 2^{\text{nextpow2}\left(\frac{D_x^2 \cdot n_0}{\Delta z \cdot \lambda_0}\right)}$$

berechnet. Für Strahlradien kleiner 50  $\mu\text{m}$  ergeben sich nach (3-7) und (3-9) bei gleicher Entfernung  $\Delta z$  in etwa die gleichen minimalen Elementanzahlen.

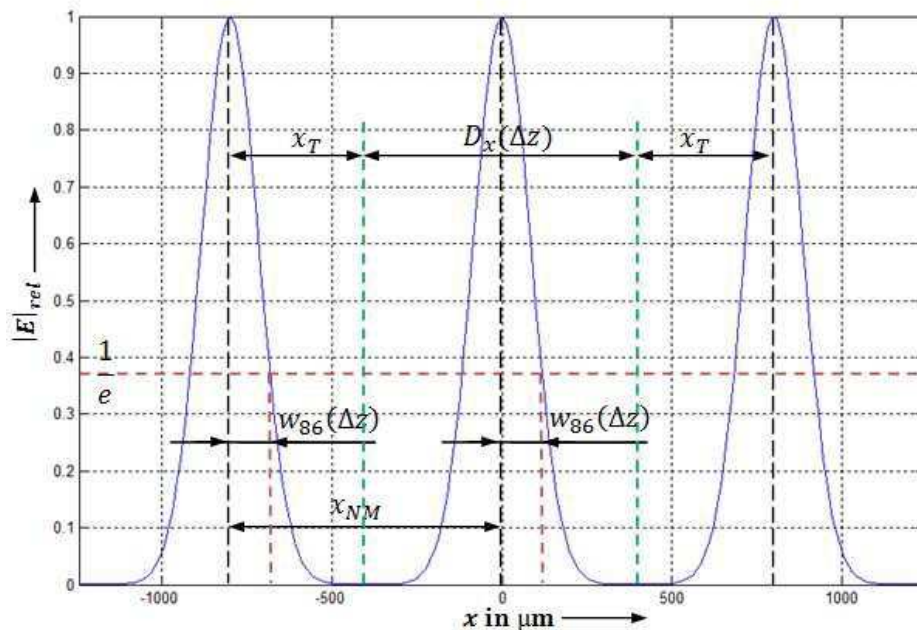
Für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT stehen somit zwei Möglichkeiten zur Berechnung zur Verfügung. Zum einen kann die Elementanzahl vorgegeben werden und die Ausdehnung ergibt sich entsprechend (3-8) oder zum anderen wird die Elementanzahl nach (3-9) bei vorgegebener Ausdehnung bestimmt. Beide Möglichkeiten haben ihre Berechtigung und Effekte. Nach (3-9) wird die Strahlverteilung nicht durch den ausgewählten Bereich begrenzt, aber die Elementanzahl kann die vorgegebenen Rechenkapazitäten überschreiten. Die Vorgabe einer Elementanzahl weist die Besonderheit der Möglichkeit zur Unterabtastung auf. Der Begriff Unterabtastung wird fortan verwendet, falls die verwendete Elementanzahl kleiner als die minimal benötigte Elementanzahl ist. Unter 5.1.2 wird darauf noch genauer eingegangen.

### 3.4 Propagationsoperatoren in Integralform

#### 3.4.1 Linienabstrahlung

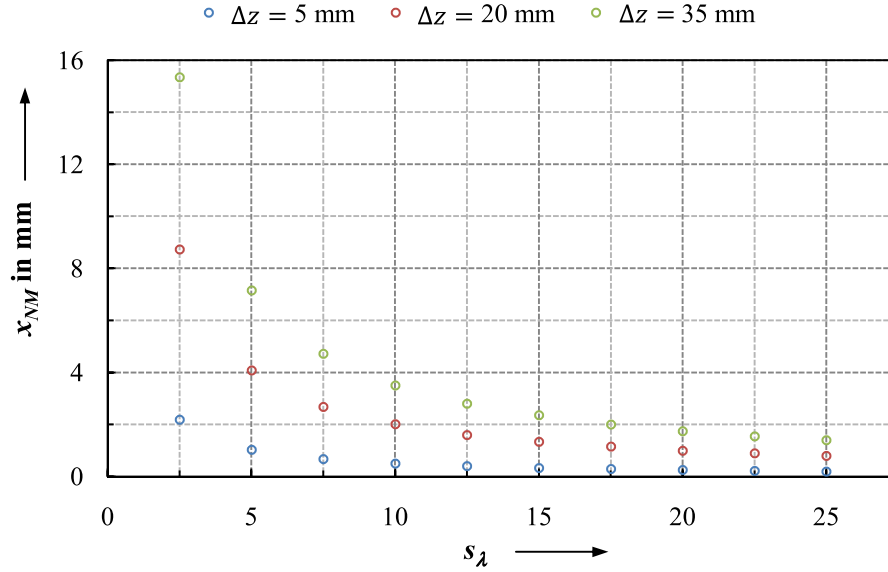
Die minimal mögliche Elementgröße ist für alle Operatoren in Integralform die Gleiche. Deswegen werden diese zu einer Gruppe zusammengefasst und nicht explizit auf jede Formulierung eingegangen.

Die Untersuchungen ergaben, dass die bereits in der Bachelorarbeit [Olb22010] beschriebenen Nebenmaxima das Hauptkriterium für die maximal mögliche Elementgröße und damit minimal benötigte Elementanzahl sind. Die Nebenmaxima besitzen exakt das gleiche Strahlprofil wie das Hauptmaximum, also das gesuchte Strahlprofil selbst. Daher wurde die Lage der Nebenmaxima  $x_{NM}$  für verschiedene Parameter (siehe **Tab. 3-1**) ermittelt und in **Abb. 3-4** und **Abb. 3-5** dargestellt.  $x_{NM}$  bezeichnet die Lage der Nebenmaxima in Bezug auf den Koordinatenursprung an einer festen Position  $z$ . Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes wurden die dabei verwendeten Größen in **Abb. 3-3** visualisiert.



**Abb. 3-3** Darstellung der absoluten relativen elektrischen Feldstärke auf der Abbildungsfläche

Parameter:  $w_{86} = 100 \mu\text{m}$ ;  $\Delta z = 20 \text{ mm}$ ;  $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ;  $s_\lambda = 25$

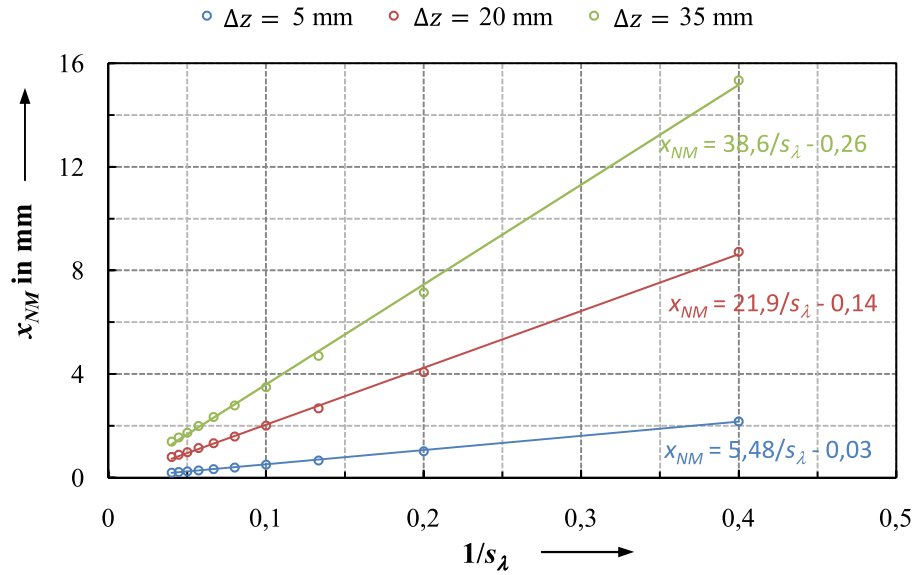


**Abb. 3-4** Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit von der Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge; Parameter:  $w_{86} = 50 \text{ } \mu\text{m}$

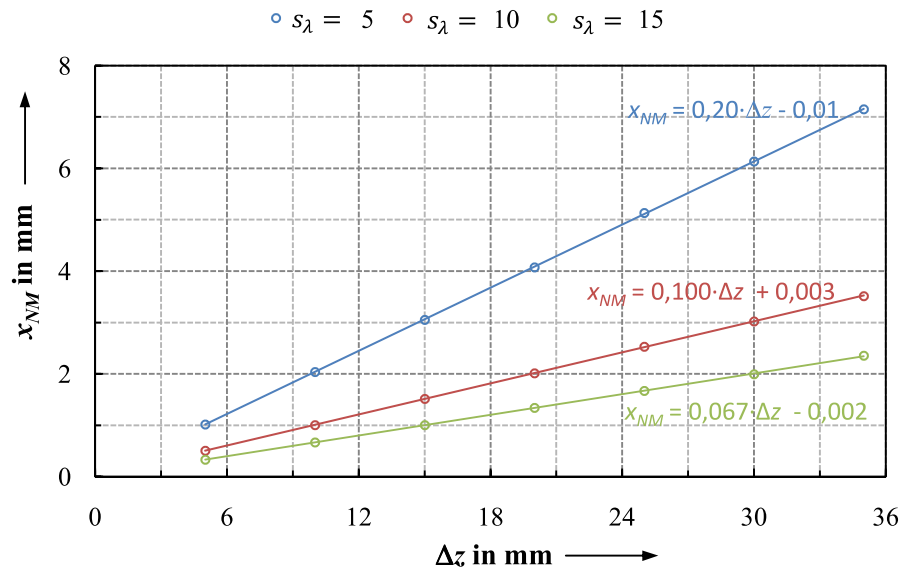
**Abb. 3-4** zeigt eine indirekte Abhängigkeit der Lage des 1. Nebenmaximums von der Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge auf. Zur Verdeutlichung der indirekten Abhängigkeit wurde die Abbildung erneut mit der reziproken Elementgröße in **Abb. 3-5** dargestellt jeweils mit Regressionsgerade. Die Regressionsgerade hat die Form:  $x_{NM} = \frac{a}{s_\lambda} + b$ . Der Grund warum die Geraden nicht im Ursprung beginnen, d. h.  $b \neq 0$ , liegt an Diskretisierungsfehlern aufgrund der konstanten Elementanzahl von 201 und der damit verbundenen großen Elementgröße.

Anhand der Darstellung in **Abb. 3-5** kann die indirekte Abhängigkeit von  $x_{NM}$  von  $s_\lambda$  bestätigt werden. Der Faktor  $a$  ist mit gewissen Ungenauigkeiten mit der Entfernung  $\Delta z$  identisch. Die Abweichungen sind wieder mit Diskretisierungsfehlern zu begründen. Eine lineare Abhängigkeit von  $\Delta z$  ist daher zu vermuten und kann mit **Abb. 3-6** bestätigt werden. Der Faktor  $a$  der Regressionsgeraden in **Abb. 3-6** entspricht sehr gut der jeweils verwendeten Elementgröße  $s_\lambda$ .

Weiterhin treten geringe Abweichungen der Lage der Nebenmaxima von der linearen Abhängigkeit zu  $\Delta z$  und indirekten Abhängigkeit von  $s_\lambda$  bei kleinen  $s_\lambda$  auf. Für kleine  $s_\lambda$  wird  $x_{NM}$  etwas größer als der berechnete indirekte Zusammenhang. Für die Abschätzung der maximal möglichen Elementgröße ist dieser Sachverhalt jedoch nicht störend.



**Abb. 3-5** Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit vom Kehrwert der Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge mit linearer Regression; Parameter:  $w_{86} = 50 \mu\text{m}$



**Abb. 3-6** Darstellung der Lage des 1. Nebenmaximums in Abhängigkeit der Entfernung der beiden Grenzflächen  $\Delta z$  mit linearer Regression; Parameter:  $w_{86} = 50 \mu\text{m}$

Die Untersuchungen zeigten, dass die Lage der Nebenmaxima unabhängig vom Strahlradius  $w_{86}$  auf der Abstrahlfläche ist.

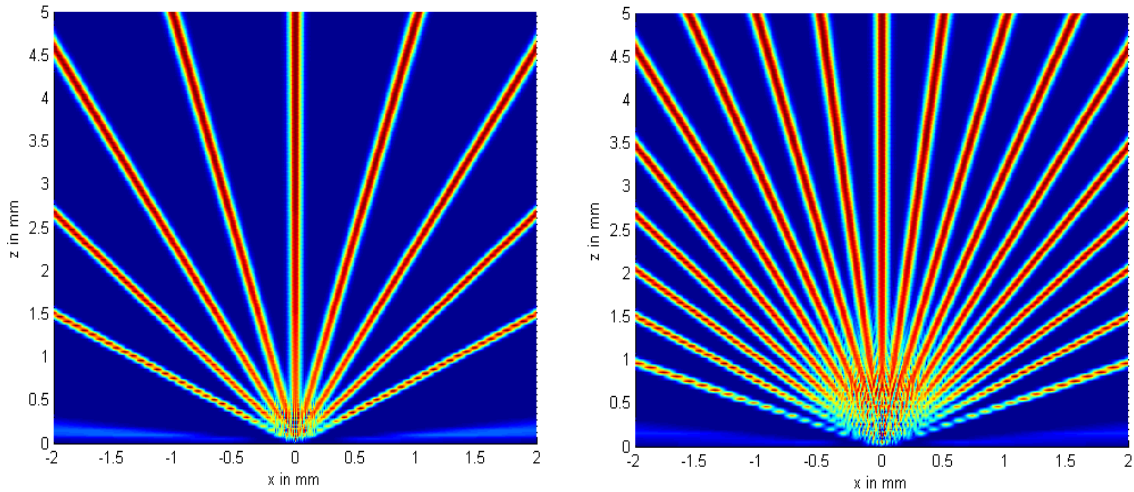
Mit Hilfe der ermittelten Abhängigkeiten kann eine Formel zur Abschätzung der maximal möglichen Elementgröße aufgestellt werden. Die Untersuchungen ergaben eine direkte Abhängigkeit von der Entfernung  $\Delta z$  der Grenzflächen sowie eine indirekte Abhängigkeit von der Elementgröße  $s_\lambda$  als Vielfaches der Wellenlänge. Als Formel zusammengefasst ergibt sich:

$$x_{NM} = \frac{\Delta z}{s_\lambda} \quad (3-10)$$

Zusammen mit (3-2) nimmt  $x_{NM}$  die folgende Gestalt an:

$$x_{NM} = \frac{\lambda_0 \Delta z}{n_0 \Delta x} \quad (3-11)$$

Dies ist die Formel für die Lage des ersten Maximum für die Beugung am Doppelspalt bzw. für die Lage des ersten Maximum an einem Beugungsgitter bei ausreichender Entfernung vom Schirm [Ped2005]. Damit ist auch die Abweichung für kleine Elementgrößen zu erklären, da (3-11) nur eine Näherung für kleine Winkel ist. Die Diskretisierung der elektrischen Feldstärke kann anhand der erhaltenen Ergebnisse mit der Beugung an einem optischen Gitter verglichen werden, was auch in **Abb. 3-7** deutlich wird.



**Abb. 3-7** Darstellung der erhaltenen normierten Feldstärkeverteilung bei Abstrahlung in die  $xz$ -Ebene für: links  $s_\lambda = 5$ ; rechts  $s_\lambda = 10$ ;  $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ ;  $\Delta z = 5 \text{ mm}$

Damit die Nebenmaxima nicht den gewählten Betrachtungsbereich  $D_x(\Delta z)$  beeinflussen, muss die Lage der Nebenmaxima

$$x_{NM} = \frac{D_x(\Delta z)}{2} + x_T \quad (3-12)$$

betragen (siehe **Abb. 3-3**).  $x_T$  steht hier für einen Toleranzbereich, der z.B. den 2,5-fachen Strahlradius  $w_{86}(\Delta z)$  auf der Abbildungsfläche betragen sollte. Unter dieser Bedingung gilt:

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{n_0} \cdot \frac{2 \cdot \Delta z}{D_x(\Delta z) + 2 \cdot x_T} = \frac{\lambda_0}{n_0} \cdot \frac{2 \cdot \Delta z}{D_x(\Delta z) + 5 \cdot w_{86}(\Delta z)} \quad (3-13)$$

Die Kenntnis des Strahlradius auf der Abbildungsfläche ist somit erforderlich, wodurch eine vorherige Abschätzung (z. B. strahlenoptisch) für eine beugungsfreie Propagation mit

minimal möglicher Elementanzahl zwingend notwendig ist. **(3-13)** kann so interpretiert werden, dass eine Elementgröße für einen größeren Bereich verwendet werden muss, als eigentlich vorhanden.

Für die minimale Elementanzahl ergibt sich aus **(3-2)** und **(3-13)**:

$$N_x \geq \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot D_x(\Delta z) \cdot \frac{D_x(\Delta z) + 5 \cdot w_{86}(\Delta z)}{2 \cdot \Delta z} + 1 \quad (3-14)$$

Weiterhin muss die Elementanzahl auf die nächst größere ungerade Zahl erhöht werden, da aufgrund der Ausnutzung von Symmetrien die Berechnung nur für die negative  $x$ -Achse und für anschließende Spiegelung eine ungerade Elementanzahl benötigt wird.

Für kleine Entfernungen bzw. große Winkel muss statt **(3-14)** die folgende Formel angewandt werden:

$$N_x \geq \frac{n_0}{\lambda_0} \cdot D_x(\Delta z) \cdot \sin \left( \arctan \left( \frac{D_x(\Delta z) + 5 \cdot w_{86}(\Delta z)}{2 \cdot \Delta z} \right) \right) + 1 \quad (3-15)$$

**(3-1)** ist ein Spezialfall von **(3-10)** bzw. **(3-13)**. Für die Untersuchungen in der Bachelorarbeit wurde ein großer Strahlradius  $w_{86}$  auf der Startfläche gewählt, wodurch sich dieser kaum auf der Abbildungsfläche ändert ( $w_{86} \cong w_{86}(\Delta z)$  vgl. **(3-4)**). Als Strahlbegrenzung wurde  $D_x(\Delta z) = 4 \cdot w_{86}(\Delta z)$  gewählt. Ebenfalls wurde die Intensität statt dem Betrag der elektrischen Feldstärke betrachtet, wodurch die sichtbare Veränderungen in den äußeren Bereichen des Strahlprofiles erst ab  $x < 2 \cdot w_{86}(\Delta z)$  ( $x_T = 2 \cdot w_{86}(\Delta z)$ ) sichtbar werden. Mit diesen Parametern ergibt sich für die maximale Elementgröße als Vielfaches der Wellenlänge:

$$s_\lambda = \frac{\Delta z}{x_{NM}} = \frac{\Delta z}{\frac{4 \cdot w_{86}}{2} + 2 \cdot w_{86}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta z}{w_{86}} \quad (3-16)$$

was **(3-1)** entspricht.

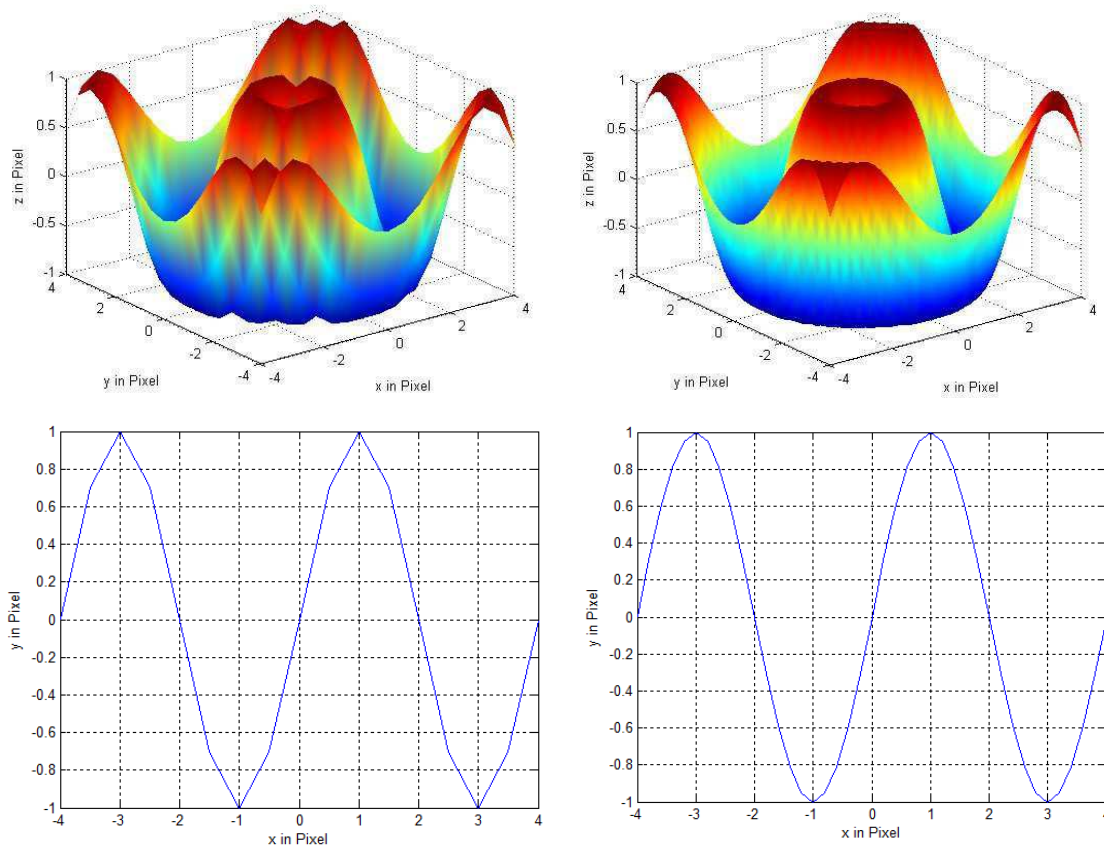
### 3.4.2 Flächenabstrahlung

Die Berechnung der elektrischen Feldstärke für Flächenabstrahlung wird im Falle rotationssymmetrischer Berechnungen ebenfalls, wie für Linienabstrahlung, nur für die negative  $x$ -Achse durchgeführt und aus dieser dann, über kubische Spline-Interpolation, die elektrische Feldstärke der gesamten Zielfläche bestimmt (vgl. [Olb22010]). Die für die Berechnung benötigte Elementanzahl ist für die berechnete Linie die gleiche wie für Linienabstrahlung. Jedoch wird für die anschließende Interpolation eine höhere Elementanzahl benötigt. Die Ursache ist die für eine korrekte Darstellung einer Schwingung notwendige Elementzahl, die im Folgenden erläutert werden soll.

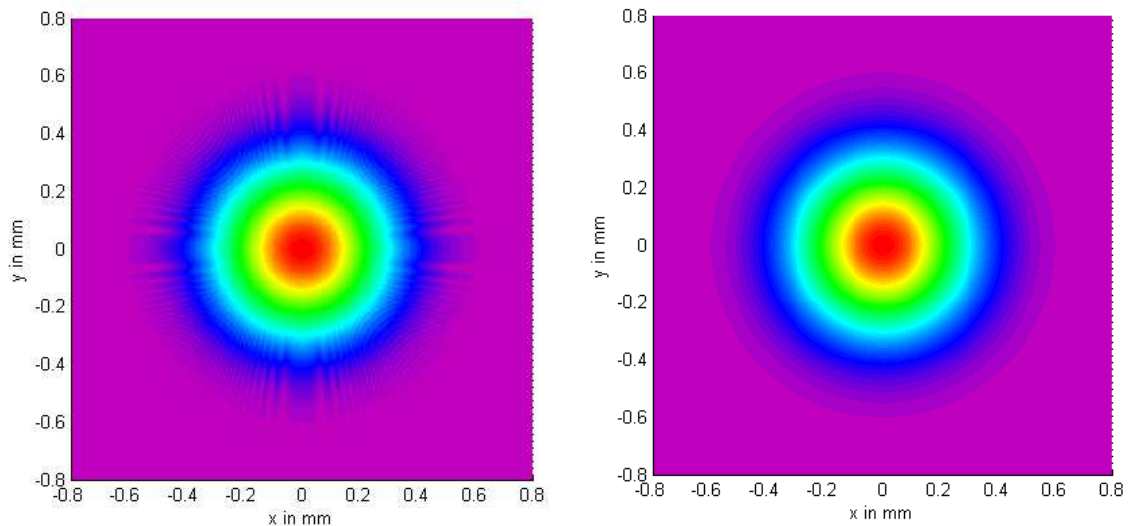


Die elektrische Feldstärke ist komplexwertig und besteht aus Real- und Imaginärteil. Bei der Propagation eines Laserstrahles von einer Grenzfläche zur nächsten, entstehen Phasendifferenzen zwischen Strahlanteilen innerhalb des Strahles. Der Grund ist die unterschiedliche Divergenz der Strahlanteile oder die durch Brechung erzwungene Richtungsänderungen. Dadurch legen die Strahlanteile unterschiedliche optische Wege zurück und sind dementsprechend phasenverschoben. Diese Phasendifferenzen sind in der elektrischen Feldstärke in der Größe von Real- und Imaginärteil enthalten. Ändert sich die Phase kontinuierlich über den Strahlquerschnitt, ergibt sich für den Real- und Imaginärteil eine Schwingung nach  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ . Diese Schwingung muss durch kubische Spline-Interpolation für alle nicht berechneten Flächenelemente nachgebildet werden.

Die korrekte Nachbildung einer Schwingung erfordert jedoch eine sehr hohe Elementanzahl, wobei besonders die Extrempunkte der Schwingung problematisch sind. Zur Visualisierung wurde das Problem in **Abb. 3-8** dargestellt. Die Darstellung beinhaltet eine lineare Interpolation zwischen den Stützstellen. Als Datensatz liegen jedoch nur die Stützstellen (Eckpunkte) der Graphen vor. Anhand der Abbildung wird jedoch sichtlich, dass die Schwingung durch zu wenige Elemente eckig wirkt. Verstärkt wird dieser Effekt durch separate Interpolation und anschließende die Überlagerung von Real- und Imaginärteil zur Gesamtfeldstärke, wodurch sich durch ein Strahlprofil wie in **Abb. 3-9** ergeben kann.



**Abb. 3-8** Darstellung verschiedener Sinusschwingungen (oben dreidimensional, unten zweidimensional) mit: 9 Elementen (links) und 21 Elementen (rechts) pro Periode



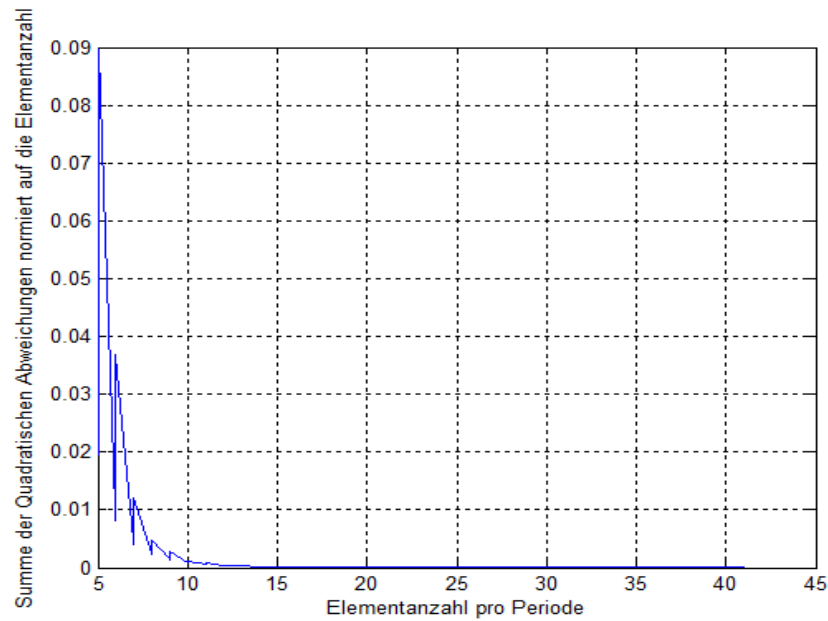
**Abb. 3-9** Darstellung der erhaltenen Strahlprofile auf der Abbildungsfläche mit links:

$N_x = 201$ , rechts:  $N_x = 351$

Für die Abbildung in **Abb. 3-9** werden nach (3-14) 287 Elemente benötigt. Werden weniger Elemente als 287 verwendet, entstehen Streifen (siehe **Abb. 3-9** links 201 Elemente). Werden mehr Elemente verwendet, verschwinden die Streifen. Jedoch sind auch bei 351 statt 287 Elementen in den äußeren Bereichen noch Unregelmäßigkeiten vorhanden. Diese sorgen dafür, dass der Strahlradius leicht vom korrekten Ergebnis abweicht. Die Fehler sind zwar gering, würden sich jedoch bei weiteren Rechnungen fortsetzen und das Ergebnis würde für jede folgende Grenzfläche immer schlechter werden.

Für die korrekte Nachbildung der Schwingung und damit exakte Berechnung auf der Abbildungsfläche muss dementsprechend diejenige Elementanzahl pro Periode bestimmt werden, bei welcher eine Schwingung mit guter Genauigkeit nachgebildet werden kann. Dafür wurden für verschiedene Elementanzahlen pro Periode die Summe der quadratischen Abweichungen normiert auf die Elementanzahl zwischen einer Referenz mit 40000 Elementen pro Periode und verschiedenen anderen Elementanzahlen pro Periode bestimmt und in **Abb. 3-10** dargestellt. Die Abweichungen wurden durch lineare Interpolation zwischen den Stützstellen und Bildung Summe der quadratischen Differenz zwischen den interpolierten Werten und der Referenz gebildet.

Anhand der Darstellung in **Abb. 3-10** ist erkennbar, dass eine Elementanzahl von etwa 15 Elementen pro Periode notwendig ist um minimale Abweichungen zu einer korrekten Schwingungsform zu erhalten. Tatsächlich werden aber  $\sqrt{2}$  mal so viele Elemente benötigt, da die Elementgröße in der Diagonale  $\sqrt{2}$ -mal größer ist. Demnach werden etwa 21 Elemente pro Periode benötigt. Diese Elementanzahl wurde bereits in **Abb. 3-8** auf der rechten Seite verwendet.



**Abb. 3-10** Darstellung der sich ergebenden Summe der quadratischen Abweichungen für verschiedene Elementanzahlen pro Periode

Anhand der gewonnen Erkenntnisse ist die Mindestelementanzahl auf der Abbildungsfläche von der Anzahl der Schwingungen und damit die Mindestelementanzahl pro Schwingung abhängig. Auf der Abstrahlfläche wird die Elementanzahl hingegen durch **(3-14)** bestimmt. Falls die berechnete Abbildungsfläche wieder als Abstrahlfläche fungieren soll, müssen die Mindestelementanzahlen nach **(3-14)** und die aus der Schwingung von Real- und Imaginärteil resultierenden Mindestelementanzahl verglichen und die größte von beiden ausgewählt werden.

Bisher konnte nur ein analytischer Zusammenhang für die Mindestelementanzahl zur Abstrahlung, jedoch nicht für die Abschätzung der Anzahl der Perioden auf der Abbildungsfläche ermittelt werden. Das Problem der Abschätzung der Perioden tauchte bereits im 1. Forschungs- und Entwicklungsbeleg bei der Verwendung einer Interpolation zur Verkürzung der Berechnungsdauer für Propagationsoperatoren in Integralform auf. Daher besitzt die Problematik eine hohe Priorität für weitere Untersuchungen.

## 4 Berechnungen für gekrümmte Flächen

Berechnungsvarianten auf Basis der Fast Fourier-Transformation können in der unter 2 beschriebenen Form nur für die Berechnung von Ebene zu Ebene angewandt werden, die sich zudem noch senkrecht zur Ausbreitungsrichtung befinden. Um die Berechnung für gekrümmte Flächen trotzdem mittels FFT-Algorithmen ausführen zu können, muss die Berechnung für jede  $z$ -Koordinate separat ausgeführt werden. Die dabei auftretenden Fälle und deren Lösung werden in den nachfolgenden Unterkapiteln diskutiert. Die Berechnungsvorschriften sind unter Anlagen: Quellcodeauszüge zu finden. Ebenso wie die Propagationsoperatoren auf der Basis der FFT können auch die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung als Integralformen nur für Propagationen von Ebene zu Ebene in der beschriebenen Form ausgeführt werden. Für die beiden zuletzt genannten Varianten auf Basis der FFT ist eine separate Berechnung für jede  $z$ -Koordinate nicht möglich, da sich für jede  $z$ -Koordinate nach (2-11) bzw. (2-7) eine unterschiedliche Elementgröße bzw. Ausdehnung ergibt.

Ein weiteres Problem der Berechnung von Berechnungsvarianten auf Basis der FFT ist zum einen, dass die Ausdehnung von Abstrahl- und Zielfläche identisch sein müssen. Die Krümmung einer sphärischen Fläche kann nur bis zu einem gewissen Maß erfolgen. Anderenfalls enthalten die  $z$ -Koordinaten imaginäre Anteile. Falls diese Kombination auftritt, werden die Koordinaten mit imaginärem Anteil durch die kleinste (bei negativer Krümmung) bzw. die größte (bei positiver Krümmung)  $z$ -Koordinate der Fläche ersetzt (vgl. Abb. 4-1 linke Grenzfläche).

Neben den Abmessungen muss auch die Elementanzahl auf Abstrahl- und Zielfläche identisch sein. Dadurch ist eine starke Größenänderung des Strahlradius sehr schwierig zu handhaben. Für kleine Strahlradien werden sehr viele Elemente benötigt um den Strahl hinreichend zu diskretisieren. Für die größere der beiden Flächen wären weniger Elemente notwendig.

### 4.1 Abstrahlung von Ebene auf gekrümmte Fläche

Zur Berechnung für gekrümmte Flächen werden alle verschiedenen  $z$ -Koordinaten der Zielfläche benötigt, was durch den MATLAB-Befehl `unique()` ermöglicht wird.

```
zz = unique (Z1);
```

Der Algorithmus wird nun für jede  $z$ -Koordinate durchlaufen, wobei der Abstand  $dz$  die Differenz zwischen aktueller  $z$ -Koordinate  $zz(t)$  und Anfangskoordinate  $z_0$  darstellt. Nur der Anteil, welcher zur aktuellen  $z$ -Koordinate gehört, ist für das Ergebnis relevant. Eine solche Separation kann durch eine logische Verknüpfung und anschließende punktweise Multiplikation

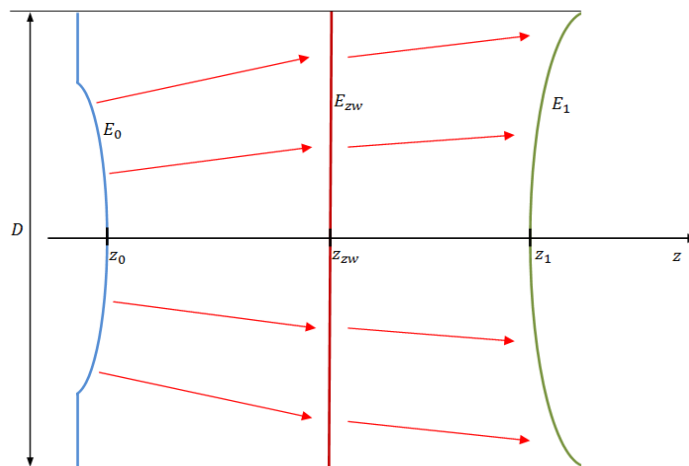
gelöst werden. Dabei stellt  $A = Z1 == zz(t)$  die logische Verknüpfung dar. Sind  $N_{z1}$  verschiedene  $z$ -Koordinaten vorhanden, muss der Algorithmus demnach  $N_{z1}$  mal ausgeführt werden und die Berechnungsdauer vervielfacht sich ebenfalls um  $N_{z1}$ . Über diesen trivialen Zusammenhang kann die Berechnungsdauer für eine gekrümmte Fläche abgeschätzt werden (siehe 6.1).

## 4.2 Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf Ebene

Die Abstrahlung von einer gekrümmten Fläche auf eine Ebene gleicht in etwa der Berechnung im Punkt 4.1. Der Unterschied besteht darin, dass eine Separation der Feldstärke auf der Abstrahlfläche vorgenommen wird. Räumlich kann diese Separation im Falle der Abstrahlung von einer sphärischen Fläche so gedeutet werden, dass von einem Ring abstrahlt wird. Im Punkt 4.1 entsprechend, dass auf einen Ring abgestrahlt wird. Die Berechnungsdauer vervielfacht sich in etwa um die Anzahl  $N_{z0}$  der verschiedenen  $z$ -Koordinaten auf der Abstrahlfläche.

## 4.3 Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf gekrümmte Fläche

Die Abstrahlung von einer gekrümmten Fläche auf eine andere gekrümmte Fläche ist besonders problematisch, da der Algorithmus  $N_{z0} \cdot N_{z1}$  mal ausgeführt werden müsste und sich damit auch die Berechnungsdauer um den gleichen Faktor erhöht. Zur Umgehung des Problems kann hingegen die Berechnung zunächst auf eine Zwischenebene durchgeführt und von dieser anschließend die Verteilung auf der Zielfläche berechnet werden (siehe Abb. 4-1). Die Lage der Zwischenebene kann beliebig zwischen  $z_0$  und  $z_1$  gewählt werden, z. B.  $z_{zw} = 0,5 \cdot (z_1 + z_0)$ . Der Algorithmus muss dadurch nur  $N_{z0} + N_{z1}$  mal durchlaufen werden.



**Abb. 4-1** Darstellung der Abstrahlung von einer gekrümmten Fläche auf eine weitere gekrümmte Fläche unter Verwendung einer Zwischenebene

#### 4.4 Vergleich mit Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral

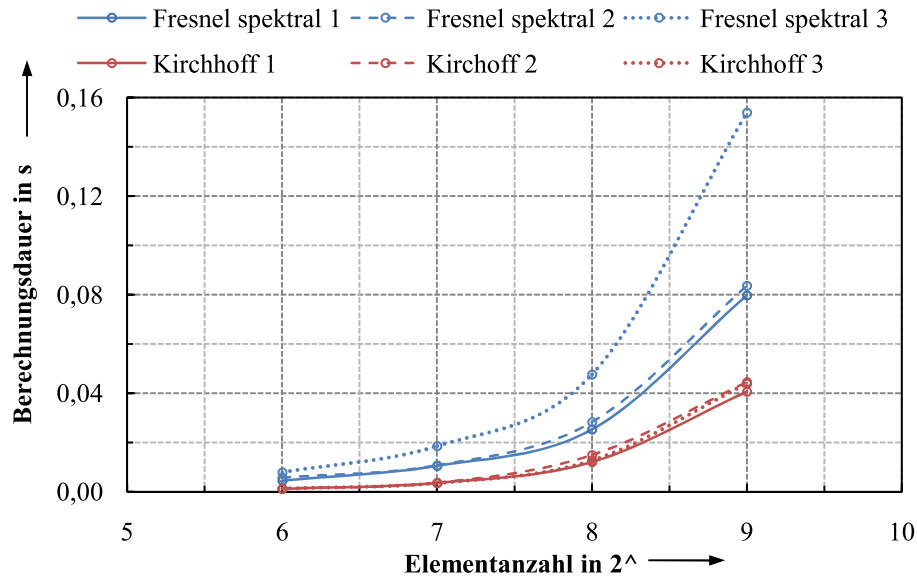
Um eine Vorstellung über den benötigten Rechenaufwand zu bekommen, werden im Folgenden die eben beschriebenen Fälle für die Fresnel-Näherung im Spektralraum mit dem Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral jeweils mit Linie und Flächenabstrahlung verglichen. Da sich die Berechnungsdauern dabei stark unterscheiden, wird auf eine grafische Darstellung für Flächenabstrahlung verzichtet und die Berechnungsdauern werden stattdessen tabellarisch in **Tab. 4-1** verglichen. Die Parameter wurden aus **Tab. 4-2** verwendet.

Elemente	Berechnungsdauer in s				
	Fresnel spektral		Fresnel-Kirchhoff		
	Linie	Fläche	Linie	Rot. Fläche	k. Rot. Fläche
<b>Parameter 1: Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf Ebene</b>					
64	0.00444	0.761	0.00117	0.0539	5.33
128	0.0105	8.4	0.00354	0.237	53.6
256	0.0253	187	0.0121	1.76	848
512	0.0798	3239	0.0406	13.73	13339
<b>Parameter 2: Abstrahlung von Ebene auf gekrümmte Fläche</b>					
64	0.00568	0.843	0.00123	0.0560	5.40
128	0.0107	11.41	0.00359	0.252	59.4
256	0.0283	253	0.0149	1.90	925
512	0.0836	4121	0.0445	14.0	14200
<b>Parameter 3: Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf gekrümmte Fläche</b>					
64	0.00781	1.32	0.00121	0.0514	5.38
128	0.0185	15.5	0.00345	0.227	55.1
256	0.0477	318	0.0126	1.76	928
512	0.154	5712	0.0439	12.9	14904

**Tab. 4-1** Auflistung der erhaltenen mittleren Berechnungsdauern für Fresnel spektral und Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegral

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$	Parameter 1: Sphäre $R_0 = 10 \text{ mm}$ Parameter 2: Ebene Parameter 3: Sphäre $R_0 = 10 \text{ mm}$	Parameter 1: Ebene Parameter 2: Sphäre $R_1 = 10 \text{ mm}$ Parameter 3: Sphäre $R_1 = 10 \text{ mm}$
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 10 \text{ mm}$
Gaußstrahl $w_{86} = 200 \mu\text{m}$	Begrenzung: Kreis $R_{\text{aperture}} = 500 \mu\text{m}$	
	Elementanzahl: $N_x = 2^6 - 2^9$	
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

**Tab. 4-2** Parameter zur Bestimmung der Berechnungsdauer in **Tab. 4-1** und **Abb. 4-2**



**Abb. 4-2** Darstellung der Abhängigkeit der ermittelten Berechnungsdauern für Linienabstrahlung für jeweils Fresnel spektral und Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegral mit: 1: Parameter 1; 2: Parameter 2; 3: Parameter 3

**Abb. 4-2** zeigt, dass die Berechnungen mit Operatoren auf Basis der FFT bei Linienabstrahlung eine längere Berechnungsdauer bei gekrümmten Flächen aufweisen als die Berechnungen mit dem Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral. Weiterhin ist zu sehen, dass sich die Berechnungsdauer für FFT Propagationsoperatoren für zwei gekrümmte Flächen um  $N_{z0} + N_{z1}$  erhöht (im gewählten Beispiel verdoppelt, da  $N_{z0} = N_{z1}$ ). Die Berechnungsdauer für Fresnel-Kirchhoff war bei allen 3 Parametersätzen in etwa gleich. Die Abbildung zeigt auch, dass Berechnungen von einer gekrümmten Fläche auf eine Ebene eine etwas kürzere Berechnungsdauer aufweisen als umgekehrt. Der Grund dafür ist die schwache Besetzung der Matrizen der Abstrahlfläche bei gekrümmten Flächen durch die Separation der aktuellen  $z$ -Koordinate, d. h. nur die Elemente sind ungleich 0, die zur aktuellen  $z$ -Koordinate gehören.

Die Berechnungsdauer für Flächenabstrahlung und Abbildung auf eine Linie mit Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegral ist deutlich kürzer als die Berechnung mit FFT Flächenabstrahlung. Demnach ist in einem solchen Fall das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral als Propagationsoperator vorzuziehen. Um wie viel die Berechnung schneller ist, hängt von den gewählten Parameter  $N_x, N_{z0}$  und  $N_{z1}$  ab.

Berechnungen mit Flächenabstrahlung und Abbildung auf eine Fläche mit Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral dauert hingegen deutlich länger als die gleiche Berechnung mit FFT Propagationsoperatoren. Auch hier muss durch die Parameter  $N_x, N_{z0}$  und  $N_{z1}$  vor der Berechnung abgeschätzt werden welcher Operator die kürzeste Berechnungsdauer liefert.

## 5 Strahlbegrenzungen

### 5.1 Begrenzung der Abbildungsfläche

Eine Begrenzung der Abbildungsfläche ist für Berechnungsverfahren auf Basis der FFT problematisch. Bei Berechnungsvarianten auf Basis der Integration hingegen unproblematisch. Die Effekte lassen sich in zwei Gruppen einteilen. Zur ersten Gruppe gehören das Winkelspektrum ebener Wellen und die Fresnel-Näherung im Spektralraum, zur zweiten Gruppe die Fresnel-Näherung– und Fraunhofer-Näherung als FFT. Daher wird im Folgenden zwischen beiden Gruppen unterschieden.

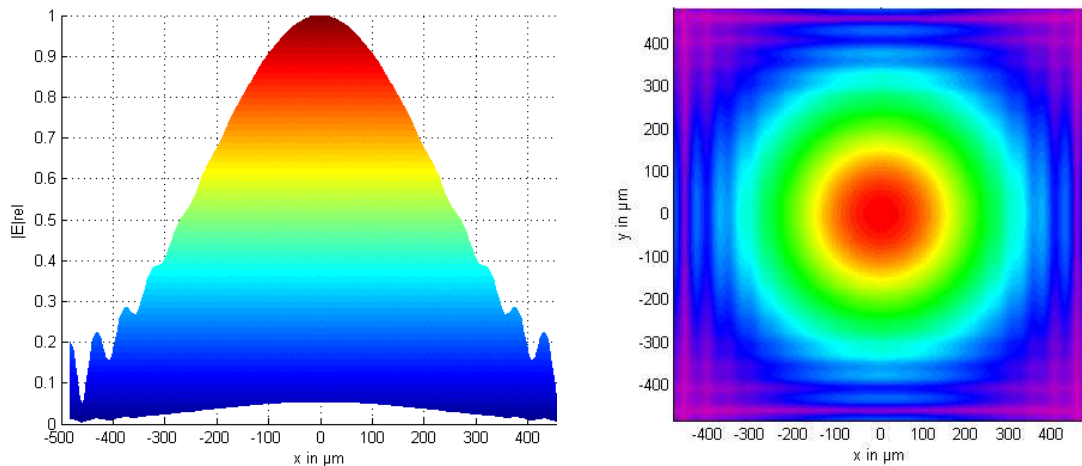
#### 5.1.1 Winkelspektrum und Fresnel-Näherung im Spektralraum

Die Untersuchungen ergaben, dass die Berechnungsvarianten dieses Unterkapitels nur für Berechnungen auf eine genügend große Abbildungsfläche geeignet sind, d. h. die Begrenzung darf das Strahlprofil nicht beschneiden. Anderenfalls tritt der Effekt auf, dass die Anteile, welche außerhalb der Begrenzung liegen, auf der gegenüberliegenden Seite wieder im Bereich der Begrenzung entstehen, wodurch sich das in **Abb. 5-1** abgebildete Strahlprofil ergibt. Für die Darstellungen wurden die Parameter aus **Tab. 5-1** verwendet. Die außerhalb liegenden Bereiche werden bildlich gesprochen, wieder in den Bereich hinein geklappt, wodurch dieser Effekt fortan als Umklappprozess bezeichnet wird.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda = 1 \mu\text{m}$	Ebene	Ebene
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 50 \text{ mm}$
Gaußstrahl	Begrenzung: Kreis	Begrenzung: Kreis
$w_{86} = 50 \mu\text{m}$	$R_{\text{aperture}}$ : FFT: $1,5w_{86}(\Delta z)$ Integralformen: $2,5w_{86}$	$R_{\text{aperture}} = 0,5w_{86}(\Delta z)$ $R_{\text{aperture}} = 0,75w_{86}(\Delta z)$ $R_{\text{aperture}} = 1,5w_{86}(\Delta z)$
	Elementanzahl FFT: 256 Elementgröße Kirchhoff: $s_\lambda = 2,5$	Elementanzahl: FFT: wie Startfläche Integralformen: 257
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

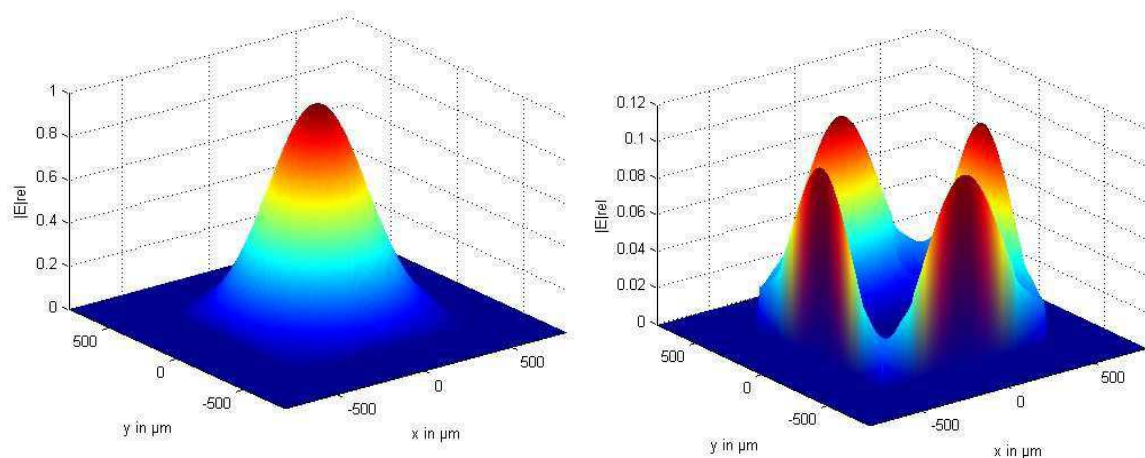
**Tab. 5-1** Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen einer Beschneidung des Strahlprofils auf der Abbildungsfläche für das Winkelspektrum ebener Wellen und die Fresnel-Näherung im Spektralraum





**Abb. 5-1** Darstellung erhaltenen relativen elektrischen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche mit 60% der eigentlich benötigten Ausdehnung ( $1,5w_{86}(\Delta z)$ ) auf der Abbildungsfläche; links: Seitenansicht; rechts: Draufsicht in anderer Farbdarstellung

Durch Nachbildung des Umklappprozesses mit Hilfe des Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegrals kann der Effekt bestätigt werden. Das in **Abb. 5-1** dargestellte Strahlprofil kann durch Addition der in **Abb. 5-2** dargestellten Profile erhalten werden.

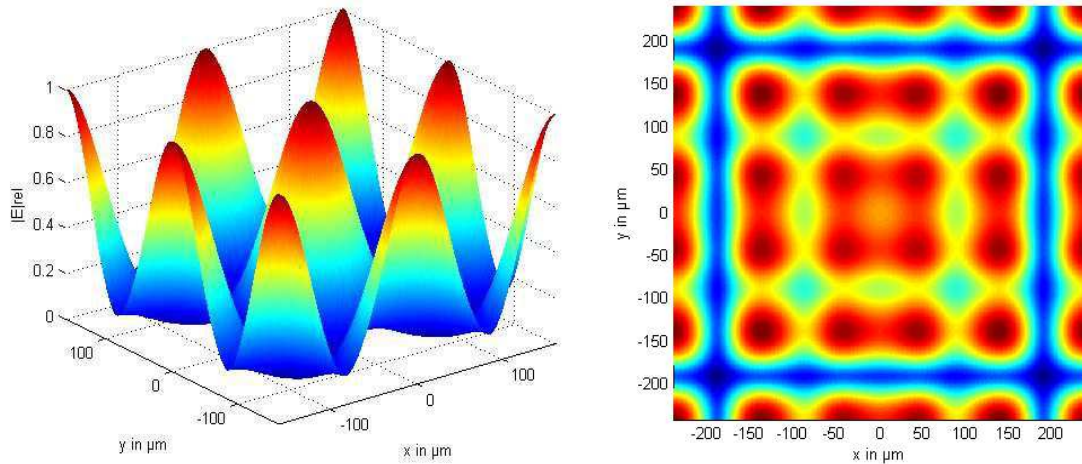


**Abb. 5-2** Darstellung der beiden Teilprofile durch deren Addition die Strahlverteilung in **Abb. 5-1** erhalten werden kann

Zur Beseitigung des Umklappens muss die Abbildungsfläche immer eine genügend große Ausdehnung besitzen. Daher ist für diese Berechnungsvarianten eine Abschätzung der Strahlgröße unbedingt notwendig. Falls eine Beschneidung gewünscht ist, muss zunächst mit einer größeren Ausdehnung gerechnet werden und anschließend die erhaltene Strahlverteilung auf die vom Benutzer vorgegebene Ausdehnung eingeschränkt werden.

Weiterhin ist aufgrund des Umklappens eine Sektorisierung (Berechnung mittels Teilmatrizen) im Falle zu großer Matrizen nicht möglich.

Wird die Ausdehnung der Abbildungsfläche weiter reduziert, ergeben sich sehr viele kleine Abbildungen des eigentlichen Strahlprofils auf der Abbildungsfläche (siehe **Abb. 5-3**). Das eigentliche Strahlprofil ist nicht zu erkennen. Eine Erklärung dieses Effektes konnte bisher nicht gefunden werden.



**Abb. 5-3** Darstellung der erhaltenen Strahlprofile für: links  $0,5w_{86}(\Delta z)$  und rechts  $0,75w_{86}(\Delta z)$  in der Draufsicht

### 5.1.2 Fresnel – und Fraunhofer-Näherung FFT

Bei einer Einschränkung der Ausdehnung auf der Abbildungsfläche für diese Varianten entsteht ein anderer Effekt als der in **5.1.1** beschriebene Umklappprozess. Für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung wird das Strahlprofil in den Bereich gepresst, d. h. Bereiche außerhalb der Begrenzung werden in den Bereich hineingedrückt und das Strahlprofil wird an den Seitenrändern gestaucht. Zur Verdeutlichung des Effektes wurde die erhaltene Strahlverteilung auf der Abbildungsfläche für das in **Tab. 5-2** dargestellte Beispiel in **Abb. 5-4** visualisiert.

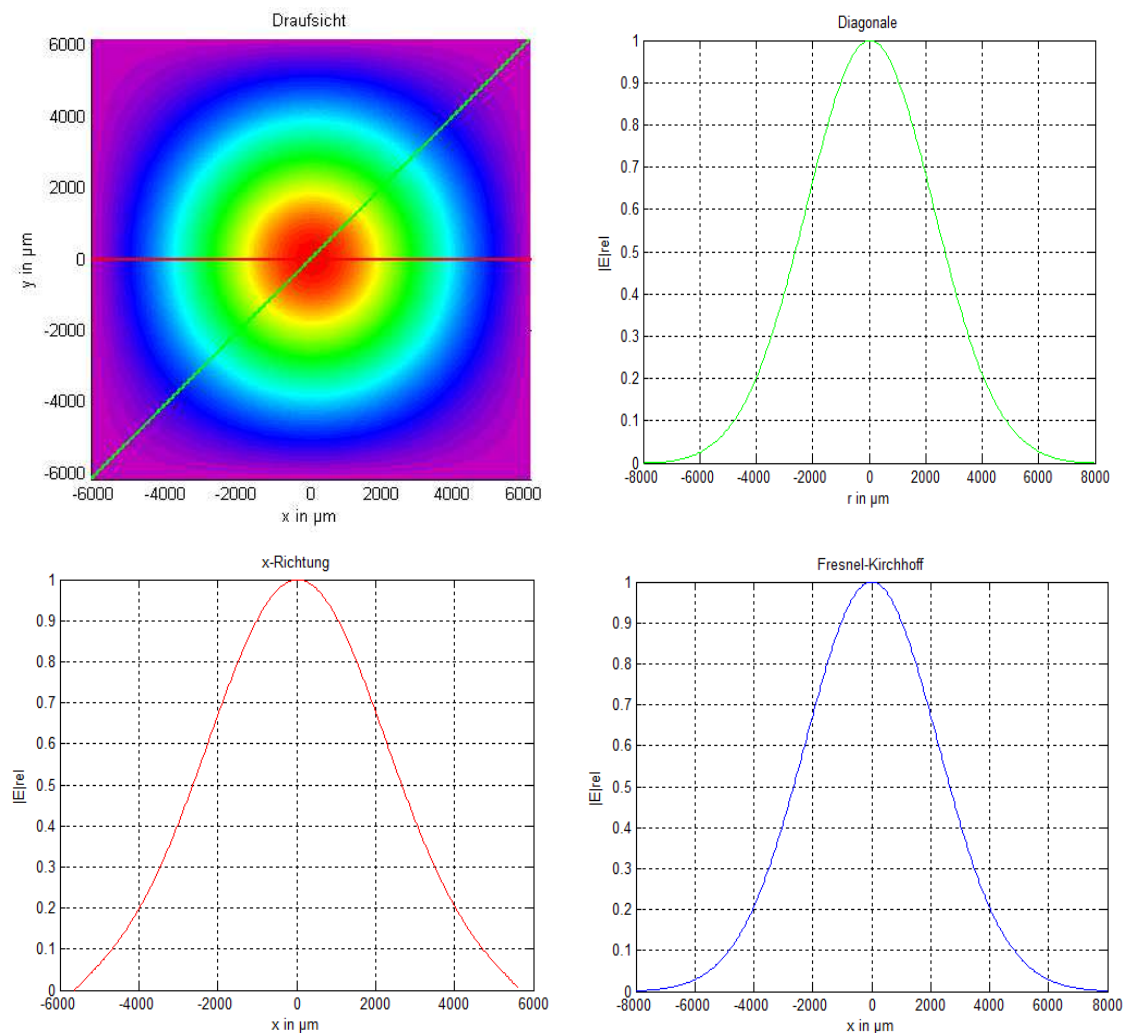
Die Begrenzung des Strahlprofils entsteht durch die Verwendung von zu wenigen Elementen (vgl. **(3-8)**). Auffällig ist jedoch, dass die Diagonale von dem beschriebenen Effekt nicht oder nur gering beeinflusst wird, d. h. mit Hilfe der Diagonale kann die Feldstärke für die Abbildungsfläche über Interpolation rekonstruiert werden. Durch die Interpolation können für die Berechnung weniger Elemente verwendet werden als nach **(3-9)** benötigt werden. Die Verwendung von zu wenigen Elementen wird im Weiteren als Unterabtastung  $N_{ua}$  bezeichnet und berechnet sich nach:

$$N_{ua} = \left(1 - \frac{N_{x \text{ verwendet}}}{N_{x \text{ min}}}\right) \cdot 100 \% \quad (5-1)$$

$N_{x \text{ min}}$  bezeichnet dabei die nach **(3-9)** benötigte Elementanzahl und  $N_{x \text{ verwendet}}$  die tatsächlich verwendete.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$	Ebene	Ebene
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 500 \text{ mm}$
Gaußstrahl	FFT: Begrenzung: Quadrat	FFT: Begrenzung: Quadrat
$w_{86} = 50 \mu\text{m}$	$D_x = (N_x - 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}}$ Kirchhoff: Kreis $R_{\text{aperture}} = 2,5w_{86}$	$D_x = (N_x - 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}}$ Kirchhoff: Kreis $R_{\text{aperture}} = 8 \text{ mm}$
	Elementanzahl $N_x = 256$	Elementanzahl $N_{x,FFT} = 256$ $N_{x,Kirch} = 257$
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

**Tab. 5-2** Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen einer Beschneidung des Strahlprofils auf der Abbildungsfläche die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT

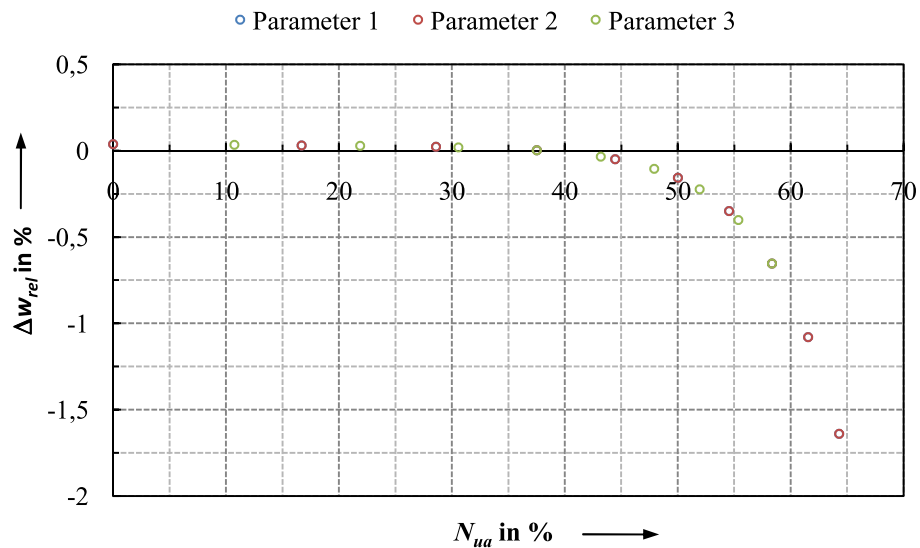


**Abb. 5-4** Darstellung des erhaltenen Strahlprofils bei Begrenzung der Abbildungsfläche für Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT im Vergleich mit dem nichtbegrenzten Strahlprofil berechnet mit Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral durch Linienabstrahlung

Zur Charakterisierung der Unterabtastung wurden weitere Untersuchungen durchgeführt und in **Abb. 5-5** dargestellt. Zur Überprüfung der Ergebnisse wurde der berechnete Strahlradius der Diagonalen mit dem sich theoretisch ergebenden Strahlradius nach (3-4) verglichen und die relativen Abweichungen  $\Delta w_{rel}$  bestimmt. Für die Berechnungen wurden die Parameter aus **Tab. 5-3** verwendet.

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
Parameter 1: $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ Parameter 2: $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$ Parameter 3: $\lambda_0 = 2 \mu\text{m}$	$z_0 = 0$	Par. 1: $z_1 = 250 - 700 \text{ mm}$ Par. 2: $z_1 = 1000 - 2800 \text{ mm}$ Par. 3: $z_1 = 120 - 300 \mu\text{m}$
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	Ebene	Ebene
Gaußstrahl	FFT: Begrenzung: Quadrat	FFT: Begrenzung: Quadrat
Parameter 1: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ Parameter 2: $w_{86} = 100 \mu\text{m}$ Parameter 3: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$	$D_x = (N_x - 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}}$	$D_x = (N_x - 1) \cdot \sqrt{\frac{\Delta z \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot N_x}}$
	Elementanzahl $N_x = 256$	Elementanzahl $N_x = 256$
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

**Tab. 5-3** Parameter zur Untersuchung der Auswirkungen der Unterabtastung für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT



**Abb. 5-5** Darstellung der relativen Abweichungen des berechneten Strahlradius der Diagonale vom theoretischen Strahlradius in Abhängigkeit der Unterabtastung in % für verschiedene Parametersätze

Darstellung **Abb. 5-5** zeigt, dass eine gleiche Unterabtastung  $N_{uu}$  zu gleichen relativen Abweichungen  $\Delta w_{rel}$  führt, wodurch kein Unterschied zwischen dem Parametersatz 1 und 2

erkennbar ist. Weiterhin ist zu erkennen, dass bis 60 % Unterabtastung der Strahlradius bzw. das Strahlprofil mit einer relativen Abweichung von unter 1 % mit Hilfe der Diagonalen berechnet werden kann. Somit können mit Hilfe der Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT z. T. Berechnungen ausgeführt werden, welche mittels Winkelspektrum oder der Fresnel-Näherung im Spektralraum aufgrund der zu hohen Elementanzahl nicht ausführbar wären. Zu beachten ist auch hier wieder die notwendige Elementanzahl pro Periode der Schwingung von Real- und Imaginärteil.

## 5.2 Begrenzung der Startfläche

Eine Begrenzung des Strahlprofils auf der Startfläche sorgt für Beugungserscheinungen, wie z. B. bei der Beugung an einer Kreisblende. Aufgrund dessen ergeben sich auf der Abbildungsfläche Nebenmaxima in einem definierten Abstand zur 0. Beugungsordnung, d. h. das Strahlprofil hat eine größere Ausdehnung als ohne Beugungserscheinungen. Für das Winkelspektrum und die Fresnel-Näherung im Spektralraum muss daher der unter **5.1.1** beschriebene Effekt des Umklappens beachtet werden und für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT das Hineindrücken (vgl. **5.1.2**). Zur Minimierung der Effekte muss die Berechnung für einen sehr viel größeren Bereich erfolgen als eigentlich gewählt. Die Effekte beeinflussen dann die äußeren Bereiche, welche uninteressant sind und nicht das Strahlprofil im gewünschten Betrachtungsbereich. Die äußeren Bereiche werden anschließend abgeschnitten. Eine Abschätzung der Strahlausdehnung ist daher zwingend erforderlich, um mögliche auftretende Beugungseffekte beachten zu können.

Eine Abschätzung wie groß der zu berechnende Bereich ist, kann mit Hilfe der analytischen Lösung für die Beugung an einer Kreisblende erfolgen. Die Intensitäts- bzw. Feldstärkeverteilung kann nach [Dem2006]:

$$E(\theta) = E_{max} \cdot \frac{2 \cdot J_1(k \cdot R_{aperture} \cdot \sin \theta)}{k \cdot R_{aperture} \cdot \sin \theta} \quad (5-2)$$

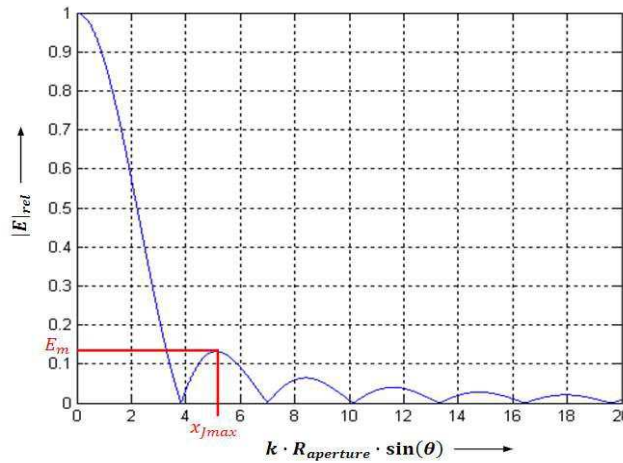
$$I(\theta) = I_{max} \cdot \left( \frac{2 \cdot J_1(k \cdot R_{aperture} \cdot \sin \theta)}{k \cdot R_{aperture} \cdot \sin \theta} \right)^2$$

abgeschätzt werden. (5-2) gilt exakt nur für eine Top-Hat-Verteilung auf der Startfläche, wodurch (5-2) nur eine Abschätzung ist. Der Winkel  $\theta$  berechnet sich aus

$$\tan \theta = \frac{x}{\Delta z} \quad (5-3)$$

$J_1$  steht für die Bessel-Funktion 1. Ordnung. Die Lagen der Maxima  $x_{J_{max}}$  sowie der relativen absoluten Feldstärke  $E_m$  sind Konstanten und wurden in MATLAB mit Hilfe der Funktion

$\text{besselj}(1, x)$  berechnet. Ihre Werte sind im Anhang unter **III** zu finden. Ihr Verlauf ist in **Abb. 5-6** skizziert.



**Abb. 5-6** Veranschaulichung des Verlaufs der relativen elektrischen Feldstärke der Bessel-Funktion 1. Ordnung in Abhängigkeit vom Argument  $k \cdot R_{aperture} \cdot \sin \theta$

Für die Berechnung muss nun zunächst das Argument der Bessel-Funktion 1. Ordnung bestimmt werden, welches am Rand des zu berechnenden Bereiches liegt:

$$x_J = 2 \cdot \pi \cdot \frac{n_0 \cdot R_{aperture}}{\lambda_0} \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{D_x}{2 \cdot \Delta z}\right)\right) \quad (5-4)$$

Anschließend wird das nächst größere Maximum zu diesem Argument gesucht:

$$m_0 = \text{find}(x_J \leq x_{Jmax}, 1, 'first') \quad (5-5)$$

Durch die Kenntnis des Maximums ist auch dessen Feldstärke  $E_{m_0}$  bekannt. Gesucht wird nun das Maximum  $m_1$ , bei welchem die relative Feldstärke nur noch  $\frac{1}{10} E_{m_0}$  beträgt:

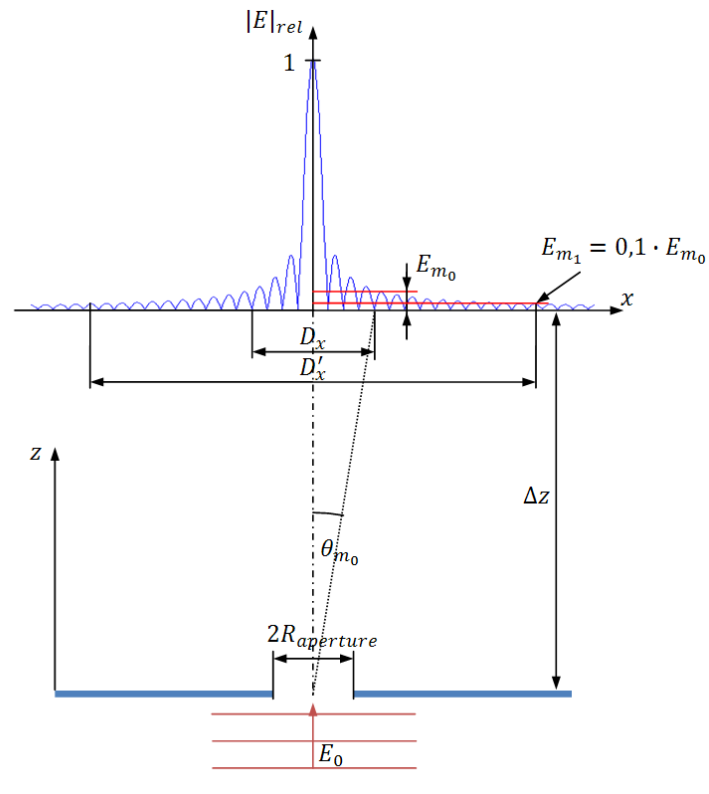
$$m_1 = \text{find}(0,1 \cdot E_{m_0} \leq E_m, 1, 'first') \quad (5-6)$$

Das gefundene Maximum dient nun zur Bestimmung der benötigten Ausdehnung:

$$D'_x = 2 \cdot \Delta z \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{x_{Jmax, m_1} \cdot \lambda_0}{n_0 \cdot R_{aperture}}\right)\right) \quad (5-7)$$

Zur Veranschaulichung der verwendeten Größen wurden diese in **Abb. 5-7** visualisiert.

Die Verwendung von  $\frac{1}{10} E_{m_0}$  wurde als Richtwert in den Untersuchungen ermittelt. Weiterhin ergaben die Untersuchungen, dass eine Erhöhung der Elementanzahl zu der durch (3-7) berechenbare Elementanzahl notwendig ist. Eine Berechnungsvorschrift sowie eine genaue Abhängigkeit von den gewählten Parametern konnte bisher nicht ermittelt werden, da sich z. B. für unterschiedliche Strahlradien unterschiedliche Beugungserscheinungen ergeben, was in **Abb. 5-8** zu sehen ist. Die Parameter für die Darstellung sind in **Tab. 5-4** zu finden.

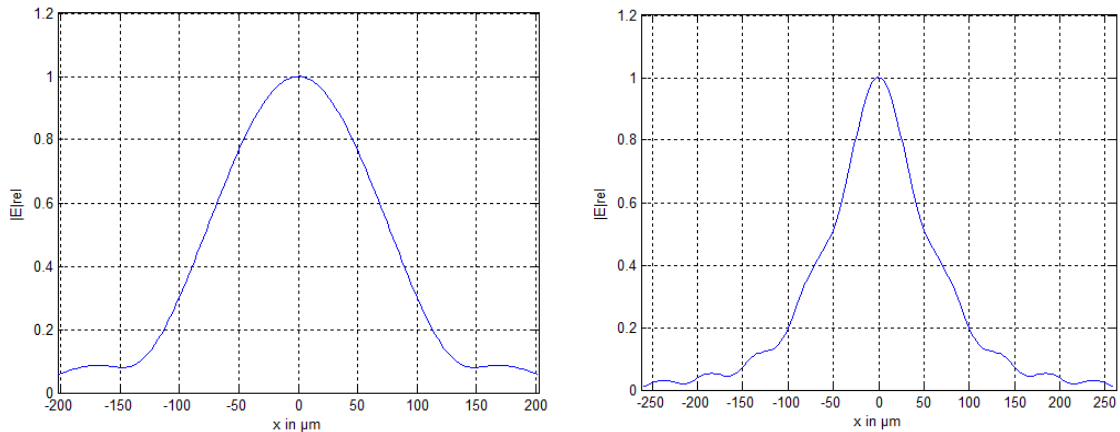


**Abb. 5-7** Veranschaulichung der Größen zur Bestimmung der bei Beugung notwendigen Ausdehnung  $D'_x$

Laser-Parameter	Startfläche	Abbildungsfläche
$\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 10 \text{ mm}$
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	Ebene	Ebene
Gaußstrahl	Begrenzung: Kreis $R_{\text{aper}} = w_{86}$	Begrenzung: Kreis $R_{\text{aper}} = 2,5w_{86}(\Delta z)$
Parameter 1: $w_{86} = 25 \mu\text{m}$ Parameter 2: $w_{86} = 25 \mu\text{m}$ Parameter 3: $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ Parameter 4: $w_{86} = 100 \mu\text{m}$	Gesamtbegrenzung: Parameter 1: Quadrat $D_x = 1984 \mu\text{m}$ Parameter 2: Quadrat $D_x = 1984 \mu\text{m}$ Parameter 3: Quadrat $D_x = 1300 \mu\text{m}$ Parameter 4: Quadrat $D_x = 1300 \mu\text{m}$	
	Elementanzahl: Parameter 1: $N_x = 1024$ Parameter 2: $N_x = 2048$ Parameter 3: $N_x = 1024$ Parameter 4: $N_x = 1024$	
	$n_0 = 1$	$n_1 = 1$

**Tab. 5-4** Parameter der in **Abb. 5-8** und **Abb. 5-9** dargestellten Feldstärkeverteilungen, Propagationsoperator: Fresnel spektral



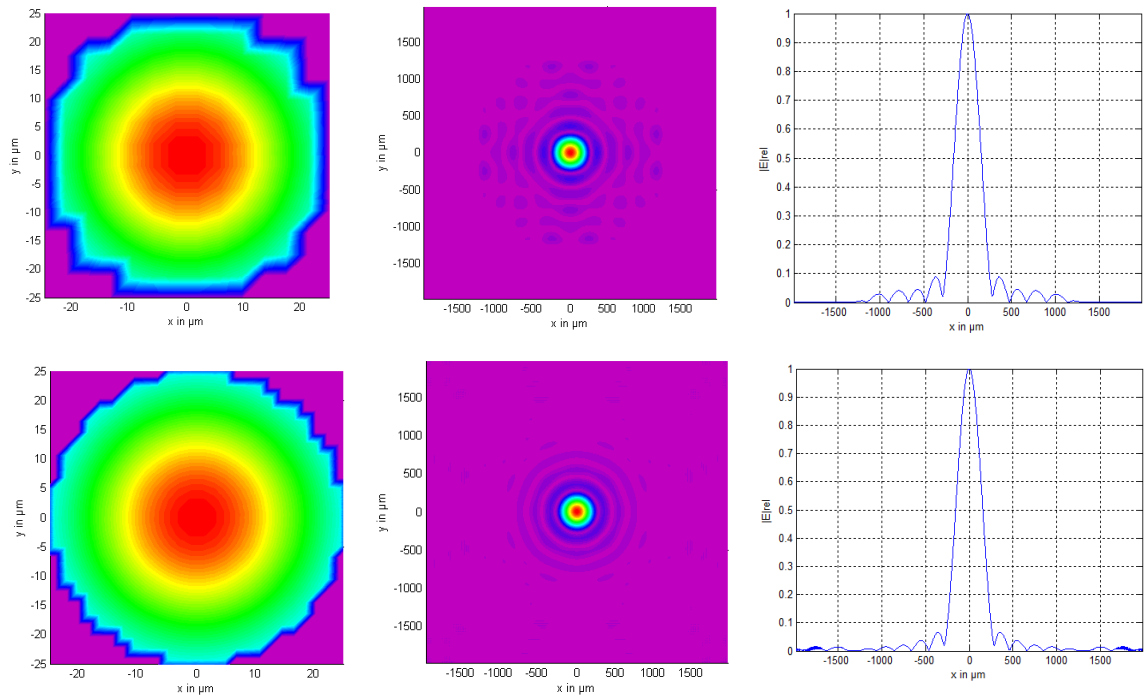


**Abb. 5-8** Darstellung erhaltenen absoluten relativen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche, links: Parameter 3  $w_{86} = 50 \mu\text{m}$ , rechts: Parameter 4  $w_{86} = 100 \mu\text{m}$

Weiterhin ist zu beachten, dass mit zunehmender Elementanzahl die Genauigkeit der Berechnung der Nebenmaxima zunimmt (siehe **Abb. 5-9**). Der Grund ist die bessere Approximation eines Kreises durch Quadrate. Die positive Eigenschaft der genaueren Berechnung kann sich jedoch negativ auf das Berechnungsergebnis auswirken: Die durch die erhöhte Elementanzahl genauer berechneten Nebenmaxima außerhalb des Berechnungsbereiches können, bei Verwendung des Winkelspektrums oder der Fresnel-Näherung im Spektralraum, hinein gespiegelt werden. Bei zu vielen Elementen können die Nebenmaxima somit auch in den Betrachtungsbereich reichen und die Ergebnisse verfälschen. Dieser Effekt tritt bei der Verwendung der Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT nicht auf.

Aufgrund der unbestimmten Elementanzahl, der größeren Ausdehnung und der damit verbundenen erhöhten Elementanzahl sollte im Falle einer großen Änderung der Strahlabmessungen (etwa ab dreifacher Änderung) die Berechnung mittels Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegral in Rotationssymmetrie ausgeführt werden. Auch hier muss wieder individuell anhand der Parameter entschieden werden, welcher Operator der sinnvollste für die Berechnung ist.





**Abb. 5-9** Darstellung erhaltenen absoluten relativen Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche oben: Parameter 1  $N_x = 1024$ , unten: Parameter 2  $N_x = 2048$ , links: die Feldstärkeverteilung auf der Startfläche in der Draufsicht, Mitte: die Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche in der Draufsicht, rechts: die Feldstärkeverteilung auf der Abbildungsfläche als Schnitt

## 6 Abschätzung der Berechnungsdauer

Zur Abschätzung der Berechnungsdauer wurden die normierten Berechnungszeiten  $t_{norm}$  analog den Ermittlungen in der Bachelorarbeit bzgl. des Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegrals [Olb22010] durchgeführt. Dazu wurden die Berechnungsdauern für verschiedene Elementanzahlen bestimmt und die erhaltenen Berechnungsdauern durch die Gesamtelementanzahl auf der Abstrahl- und Abbildungsfläche geteilt. Die Ergebnisse sind in den nach nachfolgenden Unterkapiteln zu finden.

### 6.1 Propagationsoperatoren auf Basis der Fast Fourier-Transformation

Zu dieser Gruppe gehören das Winkelspektrum ebener Wellen, die Fresnel-Näherung im Spektralraum, sowie die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung FFT. Die ermittelten normierten Berechnungszeiten sind in **Tab. 6-1** zu finden und wurden in **Abb. 6-1** und **Abb. 6-2** visualisiert.

Mit Hilfe von  $t_{norm}$  kann die Berechnungsdauer  $T$  über die Beziehung:

$$T = (N_{z0} + N_{z1}) \cdot F_{Ng} \cdot t_{norm}(F_{Ng}) \cdot \frac{1,6 \text{ GHz}}{CPU_{Takt}} \quad (6-1)$$

abgeschätzt werden.  $F_{Ng}$  ist ein Faktor für die Gesamtelementanzahl und berechnet sich aus:

$$F_{Ng} = N_{x0} \cdot N_{y0} \cdot N_{x1} \cdot N_{y1} \quad (6-2)$$

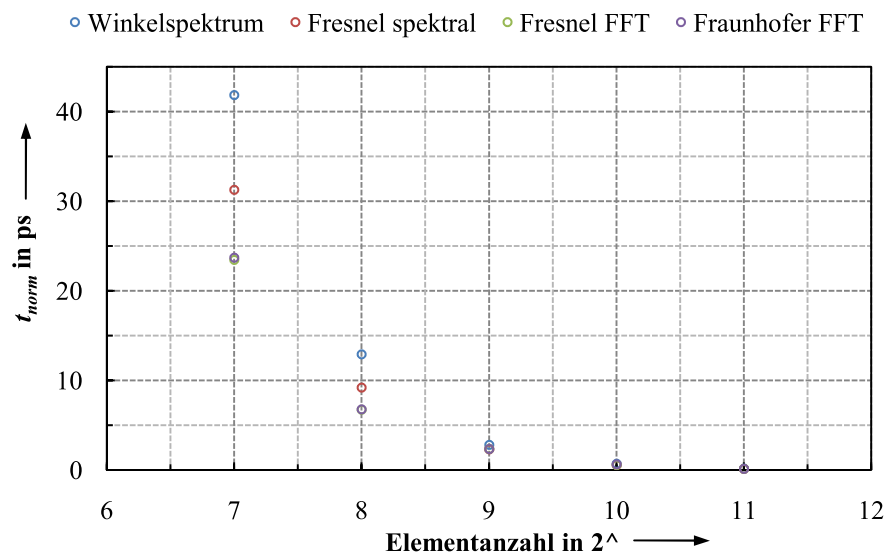
Für Linienabstrahlung gilt:  $N_{y0} = N_{y1} = 1$ . Weiterhin ist für die Fresnel –und Fraunhofer-Näherung  $N_{z0} + N_{z1} = 1$  zu setzen, da mit diesen beiden Formen eine Berechnung für gekrümmte Flächen nicht möglich ist. Das Verhältnis  $\frac{CPU_{Takt}}{1,6 \text{ GHz}}$  ist notwendig, da  $t_{norm}$  auf einem Rechner mit einem Prozessortakt von 1,6 GHz bestimmt wurde. Weiterhin ist  $t_{norm}$  für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT keine Konstante und sinkt mit zunehmender Elementanzahl. Aufgrund der starken Schwankung der aktuellen Prozessortaktfrequenz wurde  $t_{norm}(N_x^4)$  nur auf zwei zuverlässige Ziffern angegeben. Zur Bestimmung wurden quadratische Flächen gewählt wodurch gilt:  $N_{x0} = N_{y0} = N_{x1} = N_{y1} = N_x$  und  $F_{Ng} = N_x^4$  für Flächenabstrahlung bzw.  $F_{Ng} = N_x^2$  für Linienabstrahlung.

Elemente $N_x$	$t_{norm}(N_x^4)$ in ps			
	Winkelspektrum	Fresnel spektral	Fresnel FFT	Fraunhofer FFT
128	23	24	42	31
256	6,8	6,8	13	9,2
512	2,3	2,4	2,8	2,3
1024	0,59	0,64	0,74	0,59
2048	0,15	0,15	0,19	0,14

**Tab. 6-1** erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT für Flächenabstrahlung

Elemente $N_x$	$t_{norm}(N_x^2)$ in ns			
	Winkelspektrum	Fresnel spektral	Fresnel FFT	Fraunhofer FFT
128	17	13	18	16
256	4.1	4.1	5.9	5.4
512	1.5	1.4	2.3	2.0
1024	0.62	0.59	0.97	0.86
2048	0.26	0.27	0.50	0.36

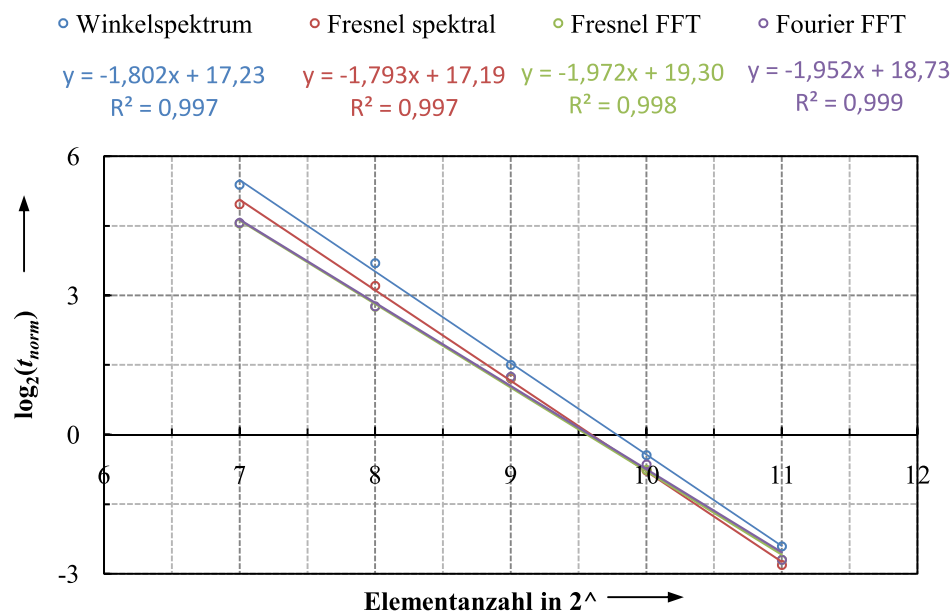
**Tab. 6-2** erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT für Linienabstrahlung



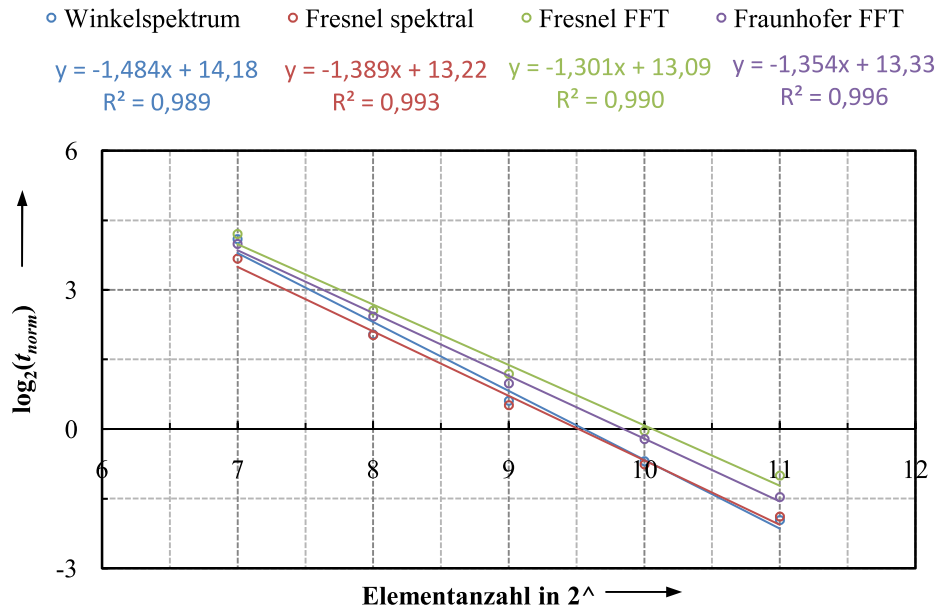
**Abb. 6-1** Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung für Flächenabstrahlung

**Abb. 6-1** zeigt, dass mit zunehmender Elementanzahl die normierte Berechnungszeit fällt. Zur Bestimmung eines analytischen Zusammenhangs wurden die ermittelten Werte als binärer Logarithmus in **Abb. 6-2** dargestellt.

Die Darstellung in **Abb. 6-2** weist einen linearen Zusammenhang zwischen normierter Berechnungszeit und von der Elementanzahl als Exponent von Zwei auf. Die lineare Regression lieferte jeweils ein Bestimmtheitsmaß nahe Eins, wodurch der lineare Zusammenhang bestätigt werden kann. Die Regressionsgerade mit Bildungsvorschrift ist ebenfalls in **Abb. 6-2** dargestellt. Die Koeffizienten  $a$  und  $b$  der Regression wurden auf 4 zuverlässige Ziffern angegeben, da kleine Änderungen bereits zu großen Unterschieden in den abgeschätzten Berechnungsdauern führen.



**Abb. 6-2** Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer als binärer Logarithmus in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung mit Regressionsgerade für Flächenabstrahlung



**Abb. 6-3** Darstellung ermittelten normierten Berechnungsdauer als binärer Logarithmus in Abhängigkeit der Elementanzahl in einer Raumrichtung mit Regressionsgerade für Linienabstrahlung

Mit Hilfe der Regressionsgerade  $\log_2 t_{norm}(N_g) = a \cdot N'_g + b + \log_2 ps$  ( $N'_g$  bezeichnet den Exponenten:  $N_g = \frac{N_x + N_y}{2} = 2^{N'_g}$  bzw.  $N'_g = \log_2 \frac{N_x + N_y}{2}$ ) kann die Berechnungsdauer durch:  $t_{norm}(F_{N_g}) = 2^{a \cdot N'_g + b} ps$  und (6-1) abgeschätzt werden.

Die ermittelten normierten Berechnungsdauern ergaben weiterhin, dass zwischen dem Winkelspektrum und der Fresnel-Näherung im Spektralraum fast kein Unterschied in den Berechnungsdauern besteht. Die Fresnel-Näherung FFT besitzt die größte Berechnungsdauer von den vier verglichenen Propagationsoperatoren. Die Fraunhofer-Näherung FFT wird mit zunehmender Elementanzahl gegenüber dem Winkelspektrum und der Fresnel-Näherung im Spektralraum effizienter und bewirkt eine geringere Berechnungsdauer. Die Unterschiede sind jedoch gering.

Für Linienabstrahlung (**Abb. 6-3**) ergab sich ein ähnlicher Verlauf wie in **Abb. 6-2**. Ein linearer Zusammenhang konnte ebenfalls festgestellt werden. Die normierten Berechnungsdauern liegen für Linienabstrahlung im Nanosekunden- statt wie für Flächenabstrahlung im Pikosekundenbereich (vgl. **Tab. 6-1** und **Tab. 6-2**). Die abgeschätzte Berechnungsdauer  $T$  ergibt sich aus den Regressionsgeraden mit  $t_{norm}(N_x^2) = 2^{a \cdot N'_x + b} ns$ .

## 6.2 Propagationsoperatoren auf Basis der Integration

Für die Propagationsoperatoren auf Basis der Integration wurde ebenfalls die normierte Berechnungszeit  $t_{norm}$  ermittelt. Die Ergebnisse sind in **Tab. 6-3** zusammengefasst. Im Gegensatz zu den Propagationsoperatoren auf Basis der FFT sind die normierten Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der Integration annähernd konstant.

Operator	Rayleigh-Sommerfeld	Kirchhoff-Fresnel	Fresnel Integration	Fraunhofer Integration
$t_{norm}$ in ns	370	207	124	127

**Tab. 6-3** erhaltene normierte Berechnungszeiten für Propagationsoperatoren auf Basis der Integration

Anhand der ermittelten normierten Berechnungsdauern lässt sich die Berechnungsdauer  $T$  durch:

$$T = F_{Ng} \cdot t_{norm} \cdot \frac{1,6 \text{ GHz}}{CPU_{Takt}} \quad (6-3)$$

bestimmen.  $F_{Ng}$  wird ebenfalls nach (6-2) gebildet.

Weiterhin ist zu erkennen, dass die Fresnel- und Fraunhofer- Näherung eine Alternative gegenüber dem Kirchhoff-Fresnelschem Beugungsintegral, im Falle einer Berechnung von Ebene zu Ebene, durch die geringere Berechnungsdauer darstellen. Für die Berechnung von Ebene zu Ebene sind jedoch Operatoren auf Basis der FFT durch die deutlich geringere Berechnungsdauer vorzuziehen. Die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung in Integralform können nicht für gekrümmte Flächen eingesetzt, wodurch sie für eine weitere Verwendung keinerlei Nutzen darstellen.

Die Integration nach Rayleigh-Sommerfeld kann für die meisten Berechnungen aufgrund der höheren Berechnungsdauer im Vergleich mit dem Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral ebenfalls vernachlässigt werden. Die Bedeutung des Rayleigh-Sommerfeldschem Beugungsintegrals, insbesondere im sehr nahen Nahfeld, muss in weiteren Untersuchungen geklärt werden.

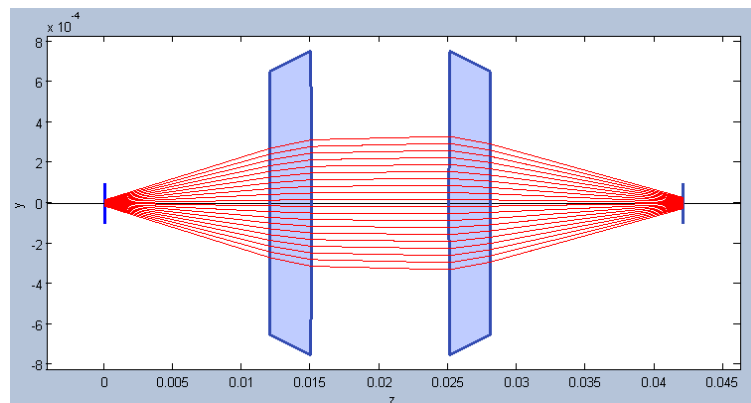
## 7 Vergleich der verschiedenen Operatoren anhand eines Beispiels

### 7.1 Parameter

Zum Vergleich der verschiedenen Operatoren wurde ein einfaches Beispiel bestehend aus einem System mit zwei Linsen gewählt. Die erste Linse sorgt für eine Kollimation, die zweite für eine Fokussierung. Die einzelnen Parameter der jeweiligen Flächen sind in **Tab. 7-1** zusammengefasst und zur Veranschaulichung wurde das System strahlenoptisch in **Abb. 7-1** visualisiert. Die benötigten Ausdehnungen  $D_x$  wurden mit Hilfe der strahlenoptischen Abschätzung ermittelt.

Laser-Parameter	Startfläche	1. Grenzfläche
$\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$	$z_0 = 0$	$z_1 = 12 \text{ mm}$
$E_0 = 1 \text{ V/m}$	Ebene	Ebene
Gaußstrahl	$n_0 = 1$	$n_1 = 1,5$
$w_{86} = 15 \mu\text{m}$	$D_{x0} = 100 \mu\text{m}$	$D_{x1} = 1,4 \text{ mm}$
2. Grenzfläche	3. Grenzfläche	4. Grenzfläche
$z_2 = 15 \text{ mm}$	$z_3 = 25 \text{ mm}$	$z_4 = 28 \text{ mm}$
Sphäre $R_2 = -8 \text{ mm}$	Sphäre $R_3 = 8 \text{ mm}$	Ebene
$n_2 = 1$	$n_3 = 1,5$	$n_4 = 1$
$D_{x2} = 1,6 \text{ mm}$	$D_{x3} = 1,7 \text{ mm}$	$D_{x4} = 1,5 \text{ mm}$
Abbildungsfläche		
$z_5 = 42 \text{ mm}$		
Ebene		
$n_5 = 1$		
$D_{x5} = 200 \mu\text{m}$		

**Tab. 7-1** Parameter der einzelnen Flächen zur Berechnung des Beispiels



**Abb. 7-1** Visualisierung der strahlenoptischen Abschätzung des gewählten Beispiels

Die minimal benötigten Elementanzahlen wurden für das Winkelspektrum und die Fresnel-Näherung im Spektralraum nach (3-7) und für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral nach (3-14) bestimmt und sind in **Tab. 7-2** dargestellt. Das Rayleigh-Sommerfeldsche Integral wurde in diesen Vergleich nicht mit einbezogen, da die gleiche Elementanzahl wie für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral benötigt wird und die Berechnungsdauer länger ist. Auch die anderen Berechnungsvarianten wurden nicht mit betrachtet, da sie für gekrümmte Flächen nicht geeignet sind. In diesem Beispiel soll kein Wechsel der Operatoren mit einbezogen werden, d. h. das komplette System soll mit dem gleichen Propagationsoperator berechnet werden.

Fläche	Elementanzahl		
		Winkelspektrum und Fresnel spektral	Kirchhoff- Fresnelsches Beugungsintegral
Startfläche	$N_x \min$	256	165
	$N_x \text{ verwendet}$	256	165
1. Grenzfläche	$N_x \min$	64	1265
	$N_x \text{ verwendet}$	256	1265
2. Grenzfläche	$N_x \min$	64	287
	$N_x \text{ verwendet}$	256	287      575
3. Grenzfläche	$N_x \min$	64	1107
	$N_x \text{ verwendet}$	256	1107
4. Grenzfläche	$N_x \min$	64	9
	$N_x \text{ verwendet}$	256	205      289
Abbildungsfläche	$N_x \min$	64	201
	$N_x \text{ verwendet}$	256	201

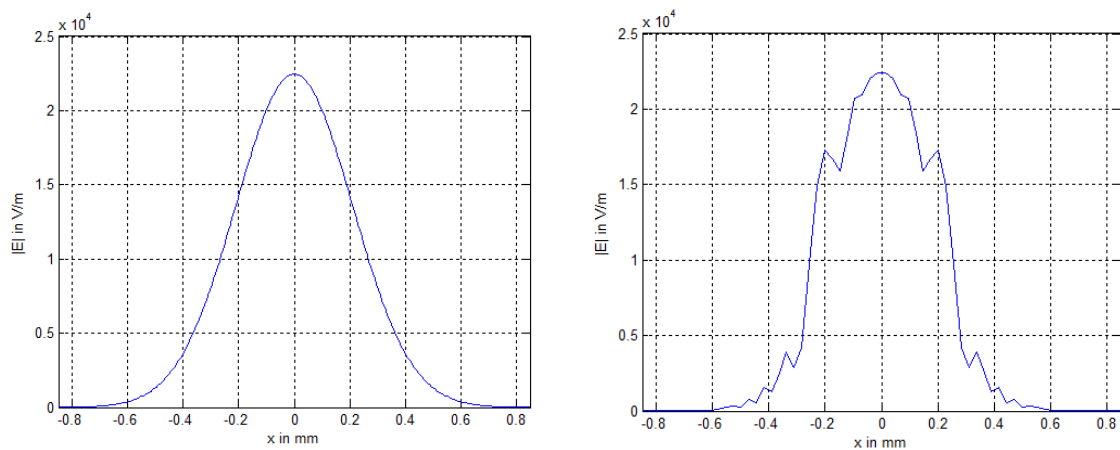
**Tab. 7-2** Gegenüberstellung der mindestens benötigten und tatsächlich verwendeten Elementanzahl, für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral gelten die linken Angaben für Linienabstrahlung und die rechten für Flächenabstrahlung

In **Tab. 7-2** wird ersichtlich, dass für das Winkelspektrum und die Fresnel-Näherung im Spektralraum oft mehr Elemente verwendet werden als eigentlich benötigt. Der Grund ist, dass eine Interpolation zum jetzigen Stand zu einer Veränderung des Strahlprofils führt (siehe **Abb. 7-2**). Daher muss z. Z. das komplette System mit der gleichen Ausdehnung (dem Maximum aller Ausdehnungen) und der gleichen Elementanzahl (ebenfalls die Maximale) berechnet werden.

Weiterhin wird auch für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral bei einigen Berechnungen eine höhere Elementanzahl benötigt, als im Vorfeld abgeschätzt. Die Ursache ist



die unter 3.4.2 beschriebene Problematik der Nachbildung einer Schwingung. Für die 3. Grenzfläche würden bei Linienabstrahlung, durch die Nachbildung der Schwingung, mehr Elemente benötigt. Da sich die Abweichungen aber in den Außenbereichen befinden, ist ihr Einfluss vernachlässigbar. Bei der Flächenabstrahlung konnten diese Bereiche jedoch nicht vernachlässigt werden, wodurch doppelt so viele Elemente in einer Raumrichtung verwendet werden mussten.



**Abb. 7-2** Vergleich der Strahlprofile auf der 2. Grenzfläche; links: ohne Interpolation (256 Elemente); rechts: mit Interpolation (64 in 256 Elemente)

Zum weiteren Vergleich wurden die benötigten und abgeschätzten Berechnungsdauern der drei Propagationsoperatoren im Folgenden für Linien- und Flächenabstrahlung gegenübergestellt.

## 7.2 Abschätzung der Berechnungsdauer

### 7.2.1 Linienabstrahlung

	SF nach 1. GF	1. GF nach 2. GF	2. GF nach 3. GF	3. GF nach 4. GF	4. GF nach AF
Winkelspektrum und Fresnel-Näherung im Spektralraum					
$N_{x0} \cdot N_{x1}$	$256^2$	$256^2$	$256^2$	$256^2$	$256^2$
$N_{z0}$	1	1	128	128	1
$N_{z1}$	1	128	128	1	1
Winkelspektrum					
$T_{\text{schätz}}$ in s	0.0006	0.0419	0.0831	0.0419	0.0006
$T_{\text{benötigt}}$ in s	0.0007	0.0388	0.0693	0.0398	0.0006

Fresnel-Näherung im Spektralraum					
$T_{\text{geschätzt}}$ in s	0.0006	0.0364	0.0723	0.0364	0.0006
$T_{\text{benötigt}}$ in s	0.0016	0.0381	0.0651	0.0376	0.0006
Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral					
$N_{x0} \cdot N_{x1}$	165·633	1265·144	287·554	1107·103	205·102
$T_{\text{geschätzt}}$ in s	0.0216	0.0376	0.0329	0.0074	0.0014
$T_{\text{benötigt}}$ in s	0.0378	0.0585	0.0572	0.0131	0.0031

**Tab. 7-3** Gegenüberstellung der geschätzten und tatsächlich benötigten Berechnungsdauer für Linienabstrahlung

Anhand von **Tab. 7-3** wird ersichtlich, dass die Berechnungsdauer in guter Näherung im Vorfeld abgeschätzt werden kann. Somit kann der Operator mit der geringsten Berechnungsdauer zuvor ermittelt werden. Im gewählten Beispiel wäre die Fresnel-Näherung im Spektralraum der Operator mit der geringsten Berechnungsdauer.

Die Berechnungsdauern aller Operatoren betrugen für jede Grenzfläche unter einer Sekunde und unterschieden sich nicht signifikant. Demnach ist jeder Operator für Linienabstrahlung geeignet.

Die zu berechnende Elementanzahl  $N_{x1}$  ist für das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral lediglich die Hälfte der Gesamtelementanzahl der Zielfläche, da nur die elektrische Feldstärke entlang der negativen  $x$ -Achse berechnet werden muss und anschließend eine Spiegelung der Feldstärke erfolgt. Auffällig ist bei der Abschätzung der Berechnungsdauer für das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral, dass die abgeschätzten Berechnungsdauern alle kleiner sind als die tatsächlichen. Der Grund dafür ist eine Abweichung des linearen Verhaltens für kleine Elementanzahlen und zusätzlicher Berechnungsschritte bei der endgültigen Rechnung (Übergabe an verschiedene Funktionen, Bedingungsabfragen,...). Da die Berechnungsdauern jedoch so gering sind, können die Abweichungen vernachlässigt werden.

### 7.2.2 Flächenabstrahlung

	SF nach 1. GF	1. GF nach 2. GF	2. GF nach 3. GF	3. GF nach 4. GF	4. GF nach AF
Winkelspektrum und Fresnel-Näherung im Spektralraum					
$N_{x0}^2 \cdot N_{x1}^2$	$256^2 \cdot 256^2$	$256^2 \cdot 256^2$	$256^2 \cdot 256^2$	$256^2 \cdot 256^2$	$256^2 \cdot 256^2$
$N_{z0}$	1	1	5712	5706	1
$N_{z1}$	1	5668	5668	1	1

Winkelspektrum					
$T_{\text{geschätzt}}$ in s	0.06	171	344	172	0.06
$T_{\text{benötigt}}$ in s	0.05	247	468	254	0.04
Fresnel-Näherung im Spektralraum					
$T_{\text{geschätzt}}$ in s	0.06	175	351	176	0.06
$T_{\text{benötigt}}$ in s	0.04	229	423	230	0.03
Kirchhoff-Fresnelsches Beugungsintegral					
$N_{x0}^2 \cdot N_{x1}$	165 <sup>2</sup> ·633	1265 <sup>2</sup> ·287	575·554	1107·145	289·102
$T_{\text{geschätzt}}$ in s	3.5645	95.2334	37.8812	36.6550	1.7375
$T_{\text{benötigt}}$ in s	5.2301	94.9677	39.1810	35.9971	1.8252

**Tab. 7-4** Gegenüberstellung der geschätzten und tatsächlich benötigten Berechnungsdauer für Flächenabstrahlung

Die Berechnungen ergaben, dass auch für Flächenabstrahlung die Berechnungsdauern sehr gut abgeschätzt werden können (siehe **Tab. 7-4**). Die Berechnungsdauern für das Kirchhoff-Fresnelsche Beugungsintegral konnten am besten abgeschätzt werden. Für das Winkelspektrum und die Fresnel-Näherung im Spektralraum waren die tatsächlichen Berechnungsdauern etwas größer. Dies kann auf Abweichungen von der Linearität zurück geführt werden.

Durch den Vergleich wurde, wie auch unter **4.4**, deutlich, dass das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral für Flächenabstrahlung und Ausnutzung der Rotationssymmetrie eine geringere Berechnungsdauer aufweist als Propagationsoperatoren auf Basis der FFT.

### 7.3 Berechnungsergebnisse

Die sich bei der Berechnung auf jeder Grenzfläche ergebenden Strahlradian wurden mit Hilfe der 2. Momente Methode berechnet und sind in **Tab. 7-5** zusammen gefasst.

Anhand des Vergleichs in **Tab. 7-5** wird deutlich, dass alle Propagationsoperatoren, egal ob Linien- oder Flächenabstrahlung, in etwa die gleichen Ergebnisse liefern. Demnach ist nur die Berechnungsdauer entscheidend welcher Operator ausgewählt werden sollte.

	Grenz- fläche	Winkelspektrum	Fresnel-Näherung im Spektralraum	Kirchhoff- Fresnelsches Beugungsintegral
Linie	1. GF	255.13	255.09	255.15
	2. GF	297.42	297.37	297.58
	3. GF	323.59	323.57	323.66
	4. GF	288.41	288.40	288.65
	5. GF	44.82	44.89	44.85
Fläche	1. GF	255.15	255.09	255.17
	2. GF	297.41	297.35	297.39
	3. GF	323.57	323.55	323.55
	4. GF	288.41	288.40	288.38
	5. GF	44.76	44.85	44.75

**Tab. 7-5** Gegenüberstellung der erhaltenen Strahlradian auf Basis 2. Moments für die verschiedenen Propagationsoperatoren

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Mit Hilfe der Untersuchungen konnten analytische Formulierungen für die minimal möglichen Elementanzahlen sowie zur Abschätzung der Berechnungsdauer aufgestellt werden. Die Ergebnisse sind in **Tab. 8-1** zusammen gefasst. Weiterhin enthält **Tab. 8-1** alle beschriebenen Effekte wie die Möglichkeit zur Unterabtastung für die Fresnel- und Fraunhofer-Näherung im Spektralraum.

Von den acht zur Verfügung stehenden Propagationsoperatoren sind nur vier Operatoren für die Berechnung eines komplexen optischen Systems geeignet. Dazu gehören das Winkelspektrum ebener Wellen, die Fresnel-Näherung im Spektralraum, das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral sowie das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral, d. h. jeweils zwei Operatoren auf Basis der FFT und zwei Operatoren in Integralform.

Propagationsoperatoren auf Basis der FFT besitzen im Vergleich zu Propagationsoperatoren in Integralform eine wesentlich geringere Berechnungsdauer für die Abstrahlung von einer planen Fläche auf eine andere plane Fläche jeweils senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für gekrümmte Flächen, unter Ausnutzung von Symmetrien, besitzt das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral eine wesentlich geringere Berechnungsdauer als die Operatoren auf Basis der FFT und ist bei jeder Art von Propagation schneller als das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral. Die Vorteile FFT basierender Operatoren können somit für komplexe Systeme nicht genutzt werden, wodurch sie nur für einfache Berechnungen oder für Spezialfälle, wie die Berechnung von diffraktiven optischen Elementen, eine Alternative darstellen. Eine Beschleunigung der Berechnung konnte somit auch mit diesen Operatoren nicht erzielt werden.

Demnach muss in weiteren Arbeiten auf die sich bereits im vorhergehenden Forschungsbeleg [Olb2010] als vorteilhaft erwiesene Interpolation für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral verstärkt eingegangen werden. Die damit verbundene Untersuchung und vorherige Abschätzung der sich ergebenden Periode der Schwingung von Real- und Imaginärteil kann auch für die exaktere Bestimmung der minimal notwendigen Elementanzahl verwendet werden, da diese Schwingung die analytische Formel zur Bestimmung der Elementanzahl (3-14) begrenzt. In Kapitel 3.4.2 wurde eine minimale Elementanzahl von 21 pro Periode bestimmt. Zur Abschätzung der entstehenden Periode könnte die strahlenoptische Abschätzung dienen, indem der Gangunterschied der einzelnen Teilstrahlen bestimmt wird.

Neben der minimal möglichen Elementanzahl für das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral kann mit Hilfe einer Interpolation die Elementanzahl sowie die Ausdehnung einer Grenzfläche für Propagationsoperatoren auf Basis der FFT gewechselt werden. Zum bisherigen Stand der Arbeit ist dies jedoch noch nicht möglich.



dauer		$\cdot t_{norm}(F_{Ng}) \cdot \frac{1,6 \text{ GHz}}{CPU_{Takt}}$		$F_{Ng} = N_{x0} \cdot N_{y0} \cdot N_{x1} \cdot N_{y1}$					
normierte Berechnungs- dauer $t_{norm}$		Linie	$t_{norm}(N_x^2) = 2^{a \cdot N'_x + b} \text{ ns}$		$N'_x = \log_2 N_x$		$t_{norm}$ in ns		
		Fläche	$t_{norm}(F_{Ng}) = 2^{a \cdot N'_g + b} \text{ ps}$		$N'_g = \log_2 \frac{N_x + N_y}{2}$				
Linie	a	-1,484	-1,389	-1,301	-1,354	370	207	124	127
	b	14,18	13,22	13,09	13,33				
Fläche	a	-1,802	-1,793	-19,72	-1,952	370	207	124	127
	b	17,23	17,19	19,3	18,73				
Berechnung eines komplexen Systems: Abmessungen und Elemente frei wählbar		nein, größte Begrenzung und größte Elementanzahl müssen für alle Grenzflächen verwendet werden		Berechnung eines komplexen Systems nicht möglich		Begrenzung und Elementanzahl jeder Grenzfläche frei wählbar, aber Mindestelementanzahl notwendig		Berechnung eines komplexen Systems nicht möglich	

**Tab. 8-1** Zusammenfassung der ermittelten Ergebnisse

Ziel der weiteren Arbeiten ist das Einbinden der untersuchten Propagationsoperatoren in das in der Bachelorarbeit entstandene Programm [Olb22010] sowie die ermittelten Formeln zur Abschätzung der Berechnungsdauer und Bestimmung der minimal möglichen Elementanzahl.

Als universell einsetzbar hat sich nur das Fresnel-Kirchhoffsche Beugungsintegral und das Rayleigh-Sommerfeldsche Beugungsintegral erwiesen. Die bisherigen Untersuchungen dieser beiden Varianten waren ohne Neigungsfaktor, wobei dieser sich jeweils unterscheidet. Die Genauigkeit und Verwendung des Neigungsfaktors sowie der Unterschiede zwischen den beiden Operatoren, besonders im sehr nahen Nahfeld, muss Gegenstand weiterer Untersuchungen sein.

Propagationsoperatoren auf Basis der FFT weisen bei Begrenzung der Abbildungsfläche besondere Effekte auf. Für das Winkelspektrum und Fresnel spektral findet ein Hineinklappen nicht zur eigentlichen Ausdehnung gehörender Bereiche statt. Wird die Begrenzung weiter eingeschränkt, wird das Strahlprofil sehr oft verkleinert im gewählten Ausschnitt erzeugt. Die Klärung dieses Effektes muss ebenfalls noch gesondert untersucht werden. Bei der Fresnel- und Fraunhofer-Näherung wird das Strahlprofil in den gewählten Bereich hinein gepresst. Dies erlaubt eine Unterabtastung durch Rekonstruktion des Strahlprofils entlang der Diagonalen.

Besonders problematisch sind die Effekte des Hineinklappens bei nicht zum Betrachtungsbereich gehörender Anteile bei Beugungseffekten, da durch Beugung eine starke Verbreiterung des Strahlprofils auftritt. In diesem Fall sollte die Berechnung mit dem Fresnel-Kirchhoffschem Beugungsintegral erfolgen.



## I Literaturverzeichnis

- [Dem2006] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik, Band 2: Elektrizität und Optik - 4. Auflage  
Berlin: Springer, 2006
- [Olb2010] Olbrich, Markus: Forschungsbeleg: Verbesserung und Weiterentwicklung des wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Strahlpropagation  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2011
- [Olb22010] Olbrich, Markus: Bachelorarbeit: Erstellung eines wellenoptischen Programmes zur Berechnung der Laserstrahlpropagation nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip  
Mittweida: Hochschule Mittweida, 2009
- [Ped2005] Pedrotti, Frank: Optik für Ingenieure – 3. Auflage  
Berlin: Springer, 2005
- [Trä2007] Träger, Frank: Handbook of Lasers and Optics – 1. Auflage  
New York: Springer, 2007

## II Anlagen: Quellcodeauszüge

### II.I Das Winkelspektrum ebener Wellen

```
%Raumfrequenzen
dfx = 1/(2*Xmax1)*(nx-1)/nx;
fx0 = ( (-nx/2):(nx/2-1) )*dfx;
[fx,fy]=meshgrid(fx0);

%Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche berechnen
E1=ifft2(fftshift(fftshift(fft2(E0)).*exp(1i*2*pi*dz*sqrt(n0^2/lambda^2-fx.^2-fy.^2))));
```

### II.II Die Fresnel-Näherung im Spektralraum

```
%Raumfrequenzen
dfx = 1/(2*Xmax1)*(nx-1)/nx;
fx0 = ( (-nx/2):(nx/2-1) )*dfx;
[fx,fy]=meshgrid(fx0);

%Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche berechnen
E1=exp(1i*k*n0*dz)*ifft2(fftshift(fftshift(fft2(E0)).*exp(-1i*pi*lambda*dz/n0*(fx.^2+fy.^2))));
```

### II.III Die Fresnel-Näherung mittels FFT

```
%Koordinaten erzeugen
dx=sqrt(dz*lambda/n0/nx);
D=(nx-1)*dx;
[X1,Y1]=meshgrid(-D/2:dx:D/2);
E0=Emax*exp(-(X1.^2+Y1.^2)/w0^2).*exp(1i*pi*n0/lambda/dz*(X1.^2+Y1.^2));

%Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche berechnen
FF=-1i*n0/lambda/dz.*exp(1i*n0*k*(dz+(X1.^2+Y1.^2)/2/dz));
E1=FF.*fftshift(fft2(fftshift(E0)))/max(max(abs(FF)))/nx;
```

**II.IV Die Fraunhofer-Näherung mittels FFT**

```
%Koordinaten erzeugen
dx=sqrt(dz*lambda/n0/nx);
D=(nx-1)*dx;
[X1,Y1]=meshgrid(-D/2:dx:D/2);
E0=Emax*exp(-(X1.^2+Y1.^2)/w0^2);

%Elektrische Feldstärke auf der Zielfläche berechnen
FF=-1i*n0/lambda/dz.*exp(1i*n0*k*(dz+(X1.^2+Y1.^2)/2/dz));
E1=FF.*fftshift(fft2(fftshift(E0)))/max(max(abs(FF)))/nx;
```

**II.V Abstrahlung von Ebene auf gekrümmte Fläche**

```
for t=1:length(zz)
A=z1==zz(t);
dz=zz(t);
E1=E1+A.*exp(1i*k*n0*dz).*ifft2(fftshift(fftshift(fft2(E0)).*exp(-
1i*pi*lambda*dz/n0*(fx.^2+fy.^2))));
end
```

**II.VI Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf Ebene**

```
for t=1:length(z)
A=Z0==z(t);
dz=z1(1)-z(t);
E1=E1+exp(1i*k*n0*dz).*ifft2(fftshift(fftshift(fft2(E0.*A)).*exp(-
1i*pi*lambda*dz/n0*(fx.^2+fy.^2))));
end
```

**II.VII Abstrahlung von gekrümmter Fläche auf gekrümmte Fläche**

```
for t=1:length(z)
A=Z0==z(t);
dz=z1(1)/2-z(t);
Ezw=Ezw+exp(1i*k*n0*dz).*ifft2(fftshift(fftshift(fft2(E0.*A)).*exp(-
1i*pi*lambda*dz/n0*(fx.^2+fy.^2))));
```

```
end

Ezw=fftshift(fft2(Ezw));

for t=1:length(zz)
A=z1==zz(t);
E1=E1+A.*exp(1i*k*n0*dz).*ifft2(fftshift(Ezw.*exp(-
1i*pi*lambda*dz/n0*(fx.^2+fy.^2))));
end
```

### III Anlagen: Werte der Bessel-Funktion 1. Ordnung

$m$	1	2	3	4	5	6	7
$E_m$	0.1323	0.0645	0.0400	0.0279	0.0209	0.0164	0.0133
$x_{Jmax}$	5.136	8.417	11.620	14.796	17.960	21.117	24.270
$m$	8	9	10	11	12	13	14
$E_m$	0.0111	0.0094	0.0081	0.0071	0.0063	0.0056	0.0051
$x_{Jmax}$	27.421	30.569	33.717	36.863	40.008	43.153	46.298
$m$	15	16	17	18	19	20	21
$E_m$	0.0046	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
$x_{Jmax}$	49.442	52.586	55.730	58.873	62.016	65.159	68.302
$m$	22	23	24	25	26	27	28
$E_m$	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
$x_{Jmax}$	71.445	74.588	77.730	80.873	84.015	87.158	90.300
$m$	29	30	31	32	33	34	35
$E_m$	0.0018	0.0017	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0013
$x_{Jmax}$	93.442	96.585	99.727	102.869	106.011	109.153	112.295
$m$	36	37	38	39			
$E_m$	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011			
$x_{Jmax}$	115.437	118.579	121.721	124.863			